

Dave
10-1-90

Cont by mch



علم ہندوستانی



نصاب درسیہ اسلامیہ

نشان (۲۲۴)

علم ہندسہ توی

Plane Geometry

(برائے انٹر میڈیٹ)

تالیف

شیخ برکت علی صاحب
ریڈر شعبہ ریاضی جامعہ عثمانیہ

محمد خواجہ محی الدین صاحب
ریڈر شعبہ ریاضی جامعہ عثمانیہ

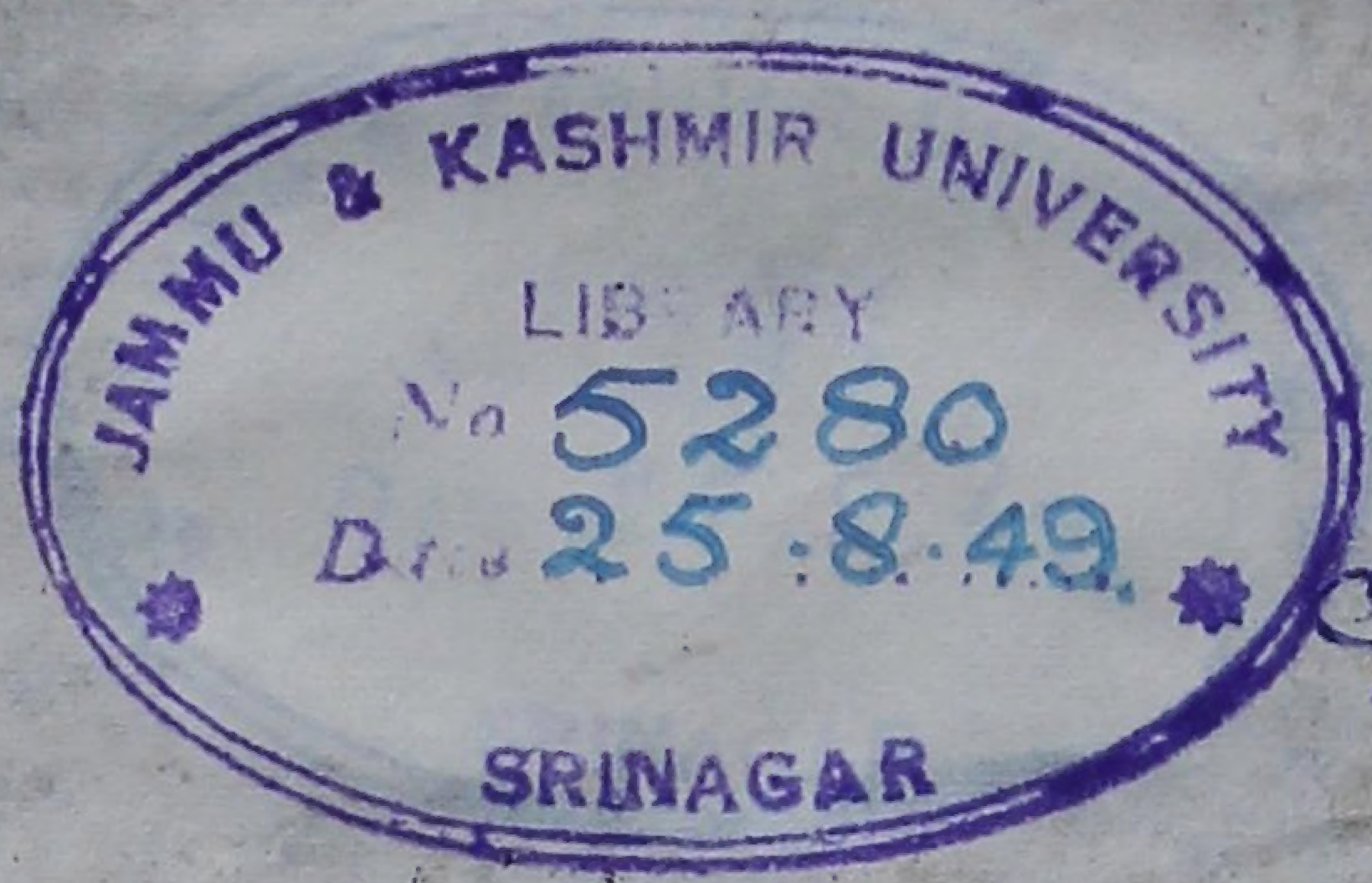
بار دوم

۱۳۶۵ھ ۱۳۵۵ھ ۱۹۴۶ء
مطبوعہ

طبع و اشاعت دارالکتاب

BT 01

Ro



Handwritten signature or initials in blue ink.

516
E24

دیب اچہ

علم ہندسہ مستوی

ہندسہ مستوی کا یہ مختصر رسالہ حسب تصفیہ مجلس نصاب ریاضی جامعہ عثمانیہ کی انٹرمیڈیٹ کی جماعتوں کے لیے تالیف کیا گیا ہے۔ جہاں تک ممکن تھا ہندسہ مستوی کے نصاب کو ملحوظ رکھتے ہوئے اس رسالہ کو اپنی حدود کے اندر مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے۔ اس مقصد کی تکمیل کے لیے چند دفعات جو علامت و علامات سے نشان زد کی گئی ہیں مضمون کے تسلسل کو قائم رکھنے کے لیے نصاب سے زائد درج کی گئی ہیں مگر یہ دفعات ایسی ہیں کہ تقریباً جملہ طلباء ان کو آسان اور دلچسپ پائینگے۔ مناسب مشقوں کے انتخاب کی غرض سے متعدد مستند انگریزی کتابوں سے استفادہ کیا گیا ہے۔ مسائل پر مکمل طور پر حاوی ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ طالب علم حتی الامکان مسائل کے متعلقہ امثلہ میں مشقوں کی کافی تعداد کو حل کرنے کی پوری پوری کوشش کرے۔ طالب علم کی سہولیت کے مد نظر جہاں ضروری تصور کیا گیا مشقوں کے اشارے یا مکمل حل درج کر دیے گئے ہیں۔ فقط

شیخ برکت علی

المقوم کیم آبان ۱۳۴۲ھ

محمّد خواجہ محی الدین

فہرست مضامین

(علم ہندوستانی)

صفحہ	مضمون
۱	پہلا باب - تمہید
۶	دوسرا باب - نسبت و تناسب
۱۱	امثلہ ۱
۲۳	امثلہ ۲
۳۰	امثلہ ۳
۳۳	امثلہ ۴
۴۲	امثلہ ۵
۴۷	امثلہ ۶
۵۰	امثلہ ۷
۵۱	تیسرا باب - مثلث کے خواص
۵۵	امثلہ ۸
۵۷	امثلہ ۹

صفحہ	مضمون
۶۲	امشله ۱۰
۶۶	امشله ۱۱
۷۳	امشله ۱۲
۷۶	چوتھا باب۔ دائروں کے خواص
۷۷	امشله ۱۳
۸۰	امشله ۱۴
۸۸	امشله ۱۵
۹۵	امشله ۱۶
۱۰۲	امشله ۱۷
۱۰۴	پانچواں باب۔ دائروں کا بنانا
۱۰۵	امشله ۱۸
۱۱۰	امشله ۱۹
۱۱۳	چھٹا باب۔ اعظم، اقل
۱۲۲	امشله ۲۰
۱۲۵	ساتواں باب۔ چلیبی نسبت، موسیقی صفا اور موسیقی منسل
۱۲۷	امشله ۲۱
۱۳۹	امشله ۲۲

بسم اللہ الرحمن الرحیم

علم ہندسہ توی

پہلا باب

تمہید

۱۔ اس باب میں بطور تمہید ہم ایسے اہم مسائل درج کرتے ہیں جن سے طالب علم کو اس کتاب کے شروع کرنے سے پہلے واقف ہونا ضروری ہے۔ یہ تمام مسائل ثبوت اور توضیحی مثالوں کے ساتھ بالعموم علم ہندسہ کی ان تمام درسی کتابوں میں پائے جاتے ہیں جو مدارس فوقانیہ میں استعمال ہوتی ہیں۔

۲۔ خطوط مستقیم۔

(۱) اگر ایک خط مستقیم ایک اور خط مستقیم سے ملے تو دو متصل زاویوں کا مجموعہ دو قائے ہوتا ہے اور اس کا عکس۔
(۲) اگر دو خط ایک دوسرے کو قطع کریں تو مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

(۳) اگر ایک قاطع دو خطوط کو کاٹے اور متبادل زاویے مساوی ہوں تو مؤخر الذکر دو خطوط متوازی ہونگے اور اس کا عکس۔

۳۔ مثلثات اور متوازی الاضلاع۔

(۱) کسی مثلث کے تین زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے مساوی ہوتا ہے۔
 (۲) دو مثلث ایک دوسرے کے ہر طرح سے مساوی ہوں گے اگر
 (ا) ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں
 کے جدا جدا مساوی ہوں اور ان ضلعوں سے بننے والے زاویے بھی مساوی ہوں۔
 (ب) اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے
 دو زاویوں کے جدا جدا برابر ہوں اور ایک مثلث کا ایک ضلع دوسرے
 مثلث کے نظیر کے ضلع کے برابر ہو۔

(ج) اگر ایک مثلث کے تین ضلعے دوسرے مثلث کے تین
 ضلعوں کے جدا جدا برابر ہوں۔

(۳) اگر ایک مثلث کے دو ضلعے آپس میں مساوی ہوں تو اُن کے
 مقابل کے زاویے بھی مساوی ہونگے اور اس کا عکس۔

(۴) اگر دو قائم الزاویہ مثلثوں میں ایک کا وتر اور ایک ضلع دوسرے
 کے وتر اور ایک ضلع کے بالترتیب مساوی ہوں تو مثلث ہر طرح سے مساوی
 ہونگے۔

(۵) ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک خط مستقیم تک چھوٹے سے
 چھوٹا فاصلہ وہ عمود ہوتا ہے جو اس نقطہ سے خط مذکور تک اکھینچا جائے۔

(۶) متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے اور نیز زاویے ایک
 دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں اور وتر ایک دوسرے کی تقصیف کرتے ہیں
 اور ہر وتر متوازی الاضلاع کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

(۷) اگر تین (یا تین سے زیادہ) متوازی خط ایسے ہوں کہ اُن سے
 ایک قاطع کے مقطوعے مساوی ہوں تو کسی دوسرے قاطع کے مقطوعے بھی مساوی ہونگے۔

۴۔ رقبے۔

(۱) مساوی قاعدوں اور مساوی ارتفاعوں والے متوازی الاضلاع
 (یا مثلث) رقبے کے لحاظ سے مساوی ہوتے ہیں۔

(۲) کسی مثلث قائم الزاویہ میں وتر پر کمریج باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے اور اس کا عکس -

۵۔ جبریہ ضابطے -

$$(۱) \quad ک (ا + ب + ج +) = ک ا + ک ب + ک ج + ...$$

$$(۲) \quad (ا \pm ب)^۲ = ا^۲ \pm ۲ ا ب + ب^۲$$

$$(۳) \quad ا^۲ - ب^۲ = (ا + ب)(ا - ب)$$

$$(۴) \quad (ا + ب)^۲ = (ا - ب)^۲ + ۴ ا ب$$

$$(۵) \quad (ا + ب)^۲ - (ا - ب)^۲ = ۴ ا ب$$

۶۔ دائرے -

(۱) دائرہ کے مرکز کو وتر کے وسطی نقطہ سے ملائیوا لائحہ مستقیم وتر پر عمود ہوتا ہے اور اس کا عکس -

(۲) دو متقاطع دائروں کے مرکزوں کو ملانے والا خط ان کے مشترک وتر کا عمودی منصف ہوتا ہے -

(۳) تین دیے ہوئے نقطوں میں سے جو ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں ایک اور صرف ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے -

(۴) ایک ہی دائرہ میں یا مساوی دائروں میں مساوی قوسوں یا مساوی وتروں کے محاذی محیط (یا مرکز) پر مساوی زاویے بنتے ہیں اور اس کا عکس -

(۵) کسی دائرہ میں مساوی طول کے وتر مرکز سے مساوی الفصل ہوتے ہیں اور اس کا عکس -

(۶) دائرہ کا کوئی مماس اس کے نقطہ تماس میں سے گزرنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے -

(۷) دائرہ کے کسی مماس اور اس کے نقطہ تماس میں سے گزرنے والے

کسی وتر کا درمیانی زاویہ متبادل قطعہ کے اندر کے زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔
 (۸) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں تو دائروں کے مرکز اور نقطہ تماس ایک خط مستقیم میں ہوتے ہیں۔
 (۹) دائرہ کے اندر بنے ہوئے ایک ذواربعتہ الاضلاع (چار ضلعی) کے مقابل کے زاویوں کا مجموعہ دو قاعے ہوتا ہے اور اس کا عکس۔
 (۱۰) اگر ایک دائرہ کے دو وتر ایک دوسرے کو قطع کریں تو ایک وتر کے حصوں کا حاصل ضرب دوسرے وتر کے حصوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

۷۔ طریق

(۱) دو ثابت نقطوں سے مساوی الفصل نقطوں کا طریق معلومہ نقطوں کو ملانے والے خط کا عمودی منصف ہوتا ہے۔
 (۲) ایک ایسے نقطہ کا طریق جو ایک دیے ہوئے خط سے ایک دیے ہوئے فاصلہ پر ہے متوازی خطوط کا ایک جوڑا ہے جن میں سے ہر ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہے۔
 (۳) ایک ایسے نقطہ کا طریق جو دو متقاطع خطوط مستقیم سے مساوی فاصلوں پر رہتا ہے ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کا جوڑا ہے۔
 (۴) ایک ایسے نقطہ کا طریق جس پر دو دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خط کے محاذی ایک دیا ہوا زاویہ بنتا ہے دائرہ کی ایک قوس ہے۔

۸۔ عملی مسئلے

(۱) ایک دیے ہوئے خط یا زاویہ کی تنصیف کرنا۔
 (۲) ایک دیے ہوئے خط پر ایک نقطے سے (جو دیے ہوئے خط پر یا اس کے باہر ہو) عمود کھینچنا۔
 (۳) دیے ہوئے زاویہ کے مساوی زاویہ بنانا۔

(۴) ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے ایک دیے ہوئے خط کے متوازی خط

کھینچنا۔

(۵) ایک دیے ہوئے خط کو متعدد مساوی حصوں میں تقسیم کرنا۔

(۶) مثلث کا بنانا جبکہ

(۱) تین ضلعے معلوم ہوں۔

(ب) دو ضلعے اور درمیانی زاویہ معلوم ہوں۔

(ج) ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوں۔

(۷) ایک دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے مساوی رقبہ کا مربع بنانا۔

(۸) ایک دیے ہوئے صحیح عدد کا جذر ہندسی طور پر معلوم کرنا۔

(۹) ایک دائرہ کھینچنا جو

(۱) ایک مثلث کے رأسوں میں سے گزرے۔

(ب) ایک مثلث کے ضلعوں کو مس کرے۔

(۱۰) ایک دیے ہوئے نقطہ پر دائرہ کا مماس کھینچنا۔

(۱۱) ایک بیرونی نقطہ سے دائرہ کے دو مماس کھینچنا۔

(۱۲) دو دیے ہوئے دائروں کے مشترک (راست اور متقاطع)

مماس کھینچنا۔

دوسرا باب

نسبت و تناسب

۹۔ تعریفات اور ابتدائی اصول۔

ایک مقدار کو اسی جنس کی کسی دوسری مقدار کے ساتھ جو ربط یا رشتہ ہو اس کو ان مقداروں کی نسبت کہتے ہیں جبکہ یہ رشتہ ان مقداروں کا اس طرح مقابلہ کرنے سے دیکھا جائے کہ ایک مقدار دوسری مقدار کا کتنے گنا یا کونسا حصہ ہے۔ مثلاً اگر دو ہم جنس مقداروں میں بالترتیب ۱ اور ۲ اکائیوں ہوں تو پہلی مقدار کو دوسری مقدار کے ساتھ جو نسبت ہے وہ کسر $\frac{1}{2}$ یا علامت $1:2$ سے تعبیر ہوتی ہے۔ پہلی مقدار کو نسبت کا مقدم اور دوسری مقدار کو مؤخر کہتے ہیں۔

دو مقداروں کی نسبت اس اکائی پر موقوف نہیں ہوتی جس کی رقم یا ان مقداروں کو ناپا گیا ہے۔

یہ نہایت ضروری ہے کہ جن مقداروں کا مقابلہ ایک نسبت کے ذریعہ کیا جائے وہ ایک ہی جنس کی ہوں۔ مثلاً دونوں طول ہوں یا دونوں اونچائی ہوں یا دونوں رقبے ہوں۔ ظاہر ہے کہ ایک خط کے طول کا مقابلہ دوسری جنس کی کسی مقدار مثلاً کسی مثلث کے رقبے کے ساتھ نہیں کیا جاسکتا۔

نیز نسبت ایک عدد مجزوع ہے جو صحیح یا مکسور ہو سکتا ہے مثلاً ۶ سمر اور ۸ سمر
لمبے خطوط کے طولوں کی نسبت $\frac{4}{3}$ یا $\frac{3}{4}$ ہے نہ کہ $\frac{3}{2}$ سمر۔
اگر دو ہم جنس مقداروں کو ایک مشترک اکائی (جسے وفق مشترک کہتے
ہیں) کی رقوم میں پورا پورا ناپا جاسکے تو ان مقداروں کو متوافق مقداریں کہتے
ہیں اور ان مقداروں کی نسبت کو دو صحیح اعداد کی نسبت سے تعبیر کیا جاسکتا

ہے۔ ممکن ہے کہ دی ہوئی مقداروں میں کوئی وفق مشترک نہ ہو مثلاً اگر ایک
مربع کا ضلع ۱ ہو تو اس کا وتر ۱.۴۱۴ ہوگا۔ ۱.۴۱۴ کی قیمت ٹھیک ٹھیک طور پر نہیں
نکالی جاسکتی اگرچہ یہ قیمت کسی مطلوبہ درجہ صحت تک حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس سے
معلوم ہوتا ہے کہ مربع کے ضلع اور وتر کے طول ایک ہی اکائی کی رقوم میں
ٹھیک ٹھیک طور پر نہیں ناپے جاسکتے۔

ایسی مقداروں کو جن میں کوئی وفق مشترک نہ ہو غیر متوافق یا عیب ان
مقداریں کہتے ہیں۔ دو غیر متوافق مقداروں کی نسبت کو ٹھیک ٹھیک طور پر دو صحیح
اعداد کی نسبت کی شکل میں بیان نہیں کیا جاسکتا لیکن ان کی نسبت کو کسی مطلوبہ
درجہ صحت تک معلوم کیا جاسکتا ہے مثلاً اگر ۱.۴۱۴ کی تقریبی قیمت ۱.۴۱۴۱۴۱۴ والی جاکے
تو مربع کے ضلع اور وتر کی نسبت کی قیمت $\frac{1414141}{1000000}$ سے تعبیر ہوگی جہاں
طول کی ایک چھوٹی اکائی ... کو بطور وفق مشترک لیا گیا ہے۔ مربع کے
ضلع اور وتر کے طولوں کی نسبت کی اس سے بہتر تقریبی قیمت معلوم ہو سکتی
ہے اگر ۱.۴۱۴ کی تقریبی قیمت اعشاریہ کے چار سے زیادہ مقاموں تک
لی جائے۔

۱۰۔ اگر دو ہم جنس مقداروں کی نسبت دو سیری ہم جنس مقداروں
کی نسبت کے مساوی ہو تو یہ چار مقداریں تناسب کہلاتی ہیں۔ یا یوں بیان
کرتے ہیں کہ یہ چار مقداریں تناسب میں ہیں مثلاً اگر ا : ب = لا : تا تو ا
ب، لا، تا تناسب کہلاتی ہیں۔
تعریف۔ ۱ اور ما کو طر فین تناسب اور ب اور لا کو

وسطین تناسب کہتے ہیں۔

نوٹ - کسی تناسب مثلاً $ا : ب = لا : ما$ میں ہر نسبت کی مقداریں ایک ہی جنس کی ہونی چاہئیں لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ دونوں نسبتوں کی چاروں مقداریں ایک ہی جنس کی ہوں مثلاً ایسا ہو سکتا ہے کہ $ا$ اور $ب$ دونوں رقبے ہوں اور $لا$ اور $ما$ دونوں طول۔ اس صورت میں تناسب سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ پہلے رقبہ کو دوسرے رقبہ کے ساتھ وہی نسبت ہے جو پہلے طول کو دوسرے طول کے ساتھ ہے۔

۱۱۔ تعریفات - اگر چار مقداریں $ا، ب، ج، د$ ایسی ہوں کہ

$ا : ب = ج : د$ تو $ا$ کو $ا : ب$ کا چوتھا تناسب کہتے ہیں۔
اگر تین مقداریں $ا، ب، ج$ ایسی ہوں کہ $ا : ب = ب : ج$ تو $ج$ کو $ا$ اور $ب$ کا تیسرا تناسب کہتے ہیں اور $ب$ کو $ا$ اور $ج$ کا وسط تناسب یا ہندسی اوسط کہتے ہیں۔

۱۲۔ علوم متعارفہ -

(۱) جو نسبتیں ایک ہی نسبت کے مساوی ہوں وہ ایک دوسرے کے بھی مساوی ہوتی ہیں۔ مثلاً اگر $ا : ب = لا : ما$ اور $ج : د = لا : ما$ تو ظاہر ہے کہ $ا : ب = ج : د$

(۲) اگر تین ہم جنس مقداریں $ا، ب، ج$ ایسی ہوں کہ $ا : ب = ب : ج$ تو ظاہر ہے کہ $ا : ب = ب : ج$

۱۳۔ تناسب کے ابتدائی مسائل -

تناسب کے متعلق مندرجہ ذیل ابتدائی مسئلوں کے ثبوت جبر و مقابلہ کی کسی درسی کتاب میں پائے جاسکتے ہیں۔

(۱) اگر $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ تو

(۱) $\frac{ا}{ج} = \frac{ب}{د}$ (عکس نسبت)

$$(۲) \quad \frac{پ}{و} = \frac{۱}{ج} \quad (\text{تبدیل نسبت})$$

$$(۳) \quad ۱و = ب ج$$

$$(۴) \quad \frac{۱+ب}{پ} = \frac{ج+و}{و} \quad (\text{ترکیب نسبت})$$

$$(۵) \quad \frac{۱-ب}{پ} = \frac{ج-و}{و} \quad (\text{تفصیل نسبت})$$

$$(۶) \quad \frac{۱+ب}{۱-ب} = \frac{ج+و}{ج-و} \quad (\text{ترکیب تفصیل نسبت})$$

$$(ب) \quad \text{اگر } \frac{۱}{پ} = \frac{ج}{و} = \frac{ع}{ف} = \dots = ک \quad \text{تو}$$

$$سگ = \frac{۱+ج+ع+...}{پ+و+ف+...}$$

$$= \frac{۱م+۱م+ج+ع+...}{۱م+۱م+و+ف+...} \quad \text{جہاں } ۱م، ۱م، ... کوئی عدد ہیں$$

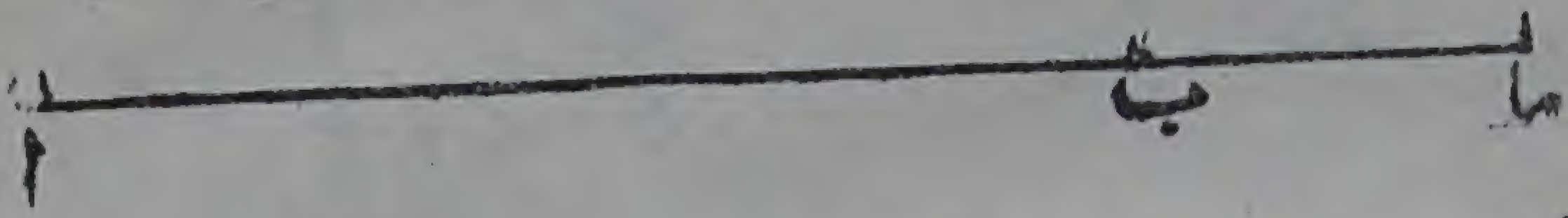
۱۴۔ **تعریف**۔ اگر ایک محدود خط مستقیم اب پر (۱ اور ب کے درمیان) ایک نقطہ لا لیا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ اب کی داخلی تقسیم نقطہ لا پر ہوئی ہے



الا اور لا ب خط اب کے دو حصے ہیں اور ان کے طولوں کی علامت ایک ہی ہے کیونکہ دونوں کی سمت وہی ہے اس لیے الا اور لا ب کی نسبت ایک مثبت مقدار ہوگی۔

اگر نقطہ ما، اب محدودہ پر (ا کی جانب یا ب کی جانب) لیا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ اب کی خارجی تقسیم نقطہ ما پر ہوئی ہے اس صورت میں اما اور ما ب کی سمتیں مختلف ہیں اور خط اب کے دو حصے اما، ما ب ہیں جو

مختلف الطامت میں۔ اس لئے اہا اور ما ب کی نسبت ایک منفی مقدار ہے۔



پس معلوم ہوا کہ اگر ا ب کے حصص کی نسبت کی علامت مثبت ہو تو تقسیم داخلی ہوگی اور اگر نسبت مذکور کی علامت منفی ہو تو تقسیم خارجی ہوگی۔

خارجی تقسیم کی صورت میں اگر ما ب کی طرف واقع ہو تو اہا اور ما ب کی نسبت ایک منفی مقدار ہوگی جس کی عددی قیمت اسے بڑی ہوگی۔ اسی طرح اگر ما ب کی طرف واقع ہو تو اہا اور ما ب کی نسبت ایک منفی کسر واجب ہوگی۔

نوٹ۔ عام طور پر اگر اشتباہ کا اندیشہ نہ ہو تو اختصار اور سہولت کے مد نظر خط کے حصوں کی نسبت کی علامت کو نظر انداز کر دیا جاتا ہے مثلاً اگر ا ب محدود پر نقطہ ما ایسا ہو کہ اہا اور ما ب کی نسبت $\frac{3}{4}$ ہو تو اسے یوں بھی بیان کیا جاتا ہے کہ ا ب کی خارجی تقسیم نقطہ ما پر $\frac{3}{4}$ کی نسبت میں ہوئی ہے۔

۱۵۔ مسئلہ۔ ایک دیے ہوئے خط کو ایک دی ہوئی نسبت میں داخل ایک اور صرف

ایک ہی نقطہ پر اور خارجاً ایک اور صرف ایک ہی نقطہ پر تقسیم کیا جاسکتا ہے۔



اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے خط ا ب کو داخل ایک دی ہوئی نسبت ج میں دو مختلف نقطوں لا اور لا پر تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{ا ز روئے مفروض } \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{ن}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{ن}}$$

$$\therefore \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

$$\therefore \frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ب}} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

۱۰ لا ب = لا ب

پس لا منطبق ہے لا پر یعنی لا اور لا مختلف نقطے نہیں ہیں۔
اسی طرح خارجی تقسیم کی صورت میں بھی یہ مسئلہ ثابت ہو سکتا ہے۔ اس کا
ثبوت مندرجہ بالا طریقہ سے طالب علم خود بہم پہنچائے۔

مشکل ۱

(۱) ایک خط مستقیم ۶ و ۹ لمبا ہے اس کی داخلی تقسیم ۵ : ۷ کی نسبت
میں کی گئی ہے۔ خط کے حصوں کے طول معلوم کرو۔ (جواب ۴ و ۵)
(۲) ایک خط مستقیم ۵ و ۴ سم لمبا ہے۔ اس کی خارجی تقسیم ۵ : ۴ کی
نسبت میں کی گئی ہے۔ حصوں کے طول معلوم کرو۔ (جواب ۵ و ۲ سم، ۸ سم)
(۳) خط مستقیم اب ۴ و ۶ سم لمبا ہے اسکو داخلی لا پر اور خارجی ما پر
ایک ہی نسبت ۵ : ۳ میں تقسیم کیا گیا ہے، لا اور ما کے طول معلوم کرو

اور تصدیق کرو کہ $\frac{۲}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۲}$ [جواب لا = ۴ سم، ما = ۱۶ سم]
(۴) لے خط مستقیم کی داخلی تقسیم نسبت م : ن میں کی گئی ہے۔ حصوں

کے طول معلوم کرو (جواب $\frac{۱}{۱۲}$ ، $\frac{۱}{۱۲}$)
(۵) لے خط مستقیم کی خارجی تقسیم نسبت م : ن میں کی گئی ہے،

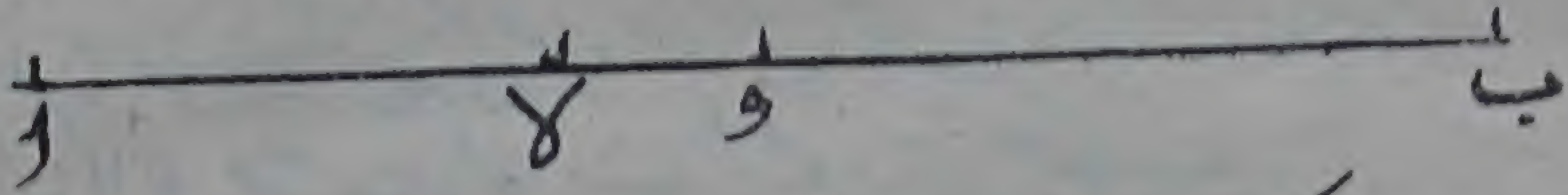
حصوں کے طول معلوم کرو۔ (جواب $\frac{۱}{۱۲}$ ، $\frac{۱}{۱۲}$)
(۶) دو خطوط مستقیم اب اور ج د کی داخلی تقسیم ایک ہی نسبت میں
بالترتیب لا اور ما پر کی گئی ہے، ثابت کرو کہ

(۱) اب : لا ب = ج د : ماد

(۲) اب : لا = ج د : ج ما

(۳) اب ایک خط مستقیم ہے، ایک نقطہ لا سے ب کی طرف

مسلط طور پر حرکت کرتا ہے، نسبت ۱:۱۰:۱۰۰ کی قیمت کے تغیر پر بحث کرو۔
فرض کرو کہ اب کا وسطی نقطہ وہ ہے اگر نقطہ لا، نقطہ ا پر ہو تو نسبت ۱:۱۰:۱۰۰ =



اگر نقطہ لا، ۱۰ اور ۱۰۰ کے درمیان ہو تو نسبت ۱:۱۰:۱۰۰ اب ایک مثبت کسر واجب ہوگی۔ جوں جوں نقطہ لا، ۱۰ کے قریب آتا جاتا ہے یہ نسبت جو اسے کم ہے بتدریج ۱ کے قریب آتی جاتی ہے اور جب لا، ۱۰ پر منطبق ہوتا ہے تو نسبت ۱:۱۰:۱۰۰ = ۱

اگر لا، ۱۰ اور ۱ کے درمیان ہو تو نسبت ۱:۱۰:۱۰۰ اب بڑی ہے اسے، جوں جوں لا، ۱ کی طرف جاتا ہے نسبت ۱:۱۰:۱۰۰ کی قیمت بتدریج بڑھتی جاتی ہے، جب لا، ۱ کے نہایت قریب جاتا ہے تو اس نسبت کی قیمت بہت بڑی ہو جاتی ہے اور جب لا، ۱ پر منطبق ہو جاتا ہے تو لا، ۱ کا طول صفر ہو جاتا ہے اور نسبت = ۱:۱۰:۱۰۰ صفر۔ اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ اس نسبت کی قیمت لاتنا ہی ہے اور اسے علامت ∞ سے تعبیر کرتے ہیں۔ طالب علم کو بخوبی سمجھ لینا چاہئے کہ جن معنوں میں عام اعداد وجود رکھتے ہیں ان معنوں میں ∞ کوئی عدد نہیں ہے مندرجہ بالا الفاظ کا مفہوم صرف یہ ہے کہ لا کو ب کے کافی قریب لینے سے ۱:۱۰:۱۰۰ کی قیمت کو کسی دیے ہوئے عدد سے (خواہ وہ عدد کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو) بڑا بنایا جاسکتا ہے۔

پس معلوم ہوا کہ جب لا، ۱۰ سے ب تک مسلسل طور پر حرکت کرتا ہے تو نسبت ۱:۱۰:۱۰۰ کی قیمت مسلسل طور پر صفر سے ∞ تک بدلتی ہے۔
(۸) اب ایک خط مستقیم ہے۔ ایک نقطہ لا، ۱ سے روانہ ہو جائے۔ دائیں طرف حرکت کرتا ہے۔ (دیکھو نیچے کی شکل) نسبت ۱:۱۰:۱۰۰ کے تغیر پر بحث کرو۔



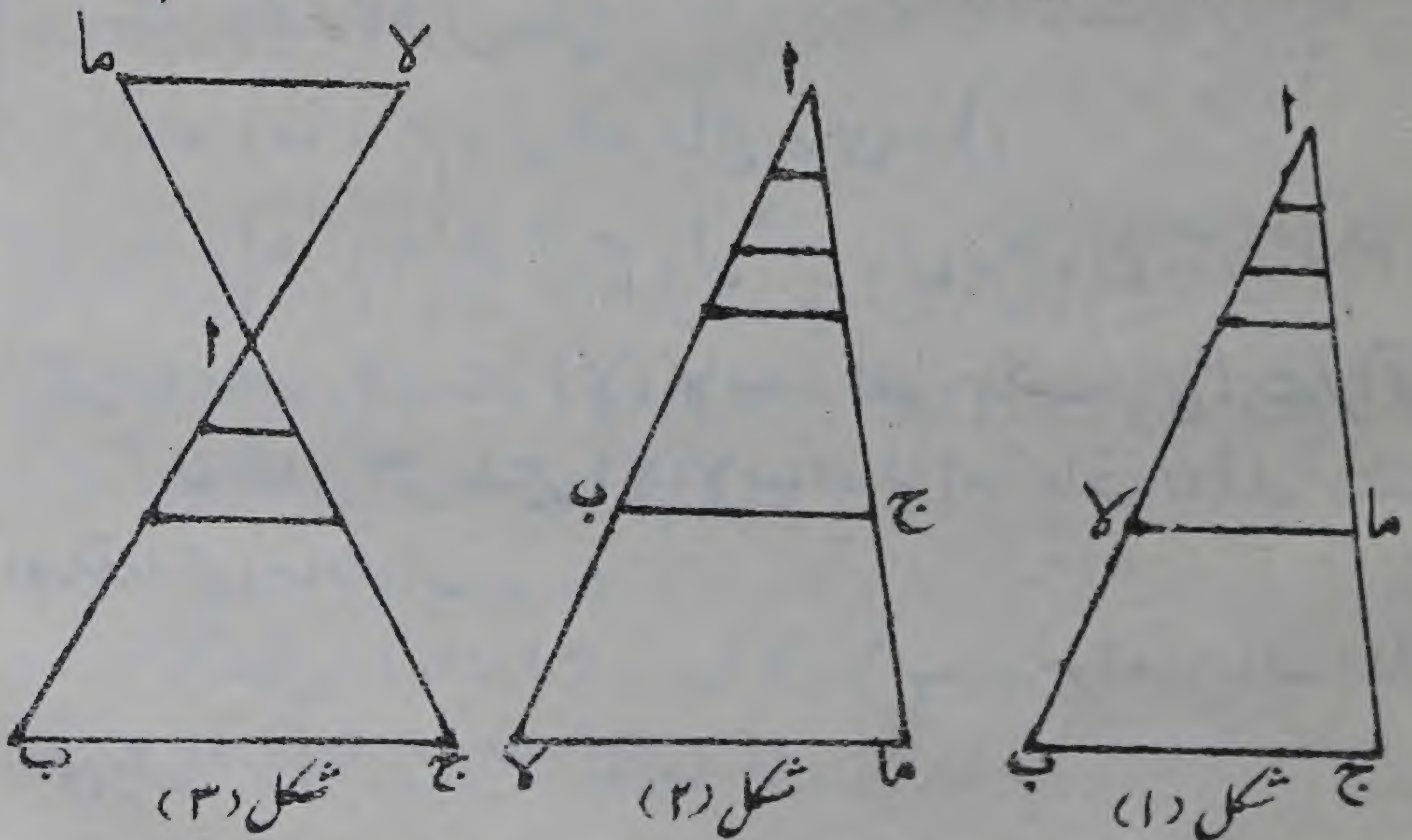
ظاہر ہے کہ یہ نسبت منفی ہوگی۔

جب لا ب کے قریب ہے تو لا : لا ب بہت بڑی منفی مقدار ہے اور لا کو ب کے کافی قریب لینے سے اس نسبت کی عددی قیمت کو جتنا بڑا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ جوں جوں دائیں جانب حرکت کرتا ہے اس نسبت کی عددی قیمت گھٹتی جاتی ہے لیکن ہمیشہ اسے بڑی رہتی ہے۔ لا کو ب سے کافی دُور لینے سے اس نسبت کی عددی قیمت کو ا کے بقدر قریب چاہیں لا سکتے ہیں۔ تیس معلوم ہوا کہ جوں جوں لا ب سے شروع ہو کر دائیں طرف حرکت کرتا ہے نسبت لا : لا ب کی عددی قیمت ∞ سے ا کے قریب آتی جاتی ہے۔

نوٹ۔ دیکھا جائے کہ نسبت لا : لا ب کی کسی عددی قیمت کے جواب میں جو ا سے بڑی ہے نقطہ لا کے دو مقام ہیں جن میں ایک و اور ب کے درمیان ہے اور دوسرا اب محدودہ پر ب کے دائیں جانب ہے۔

(۹) سوال ۵ کے مماثل طریقہ سے نسبت لا : لا ب کے تغیر پر بحث کرو جبکہ لا ب محدودہ پر ا سے شروع ہو کر بائیں جانب حرکت کرے۔

۱۶۔ مسئلہ : ایک خط مستقیم جو ایک مثلث کے ایک ضلع کے متوازی ہے مثلث کے باقی دو اضلاع کو یا اضلاع محدودہ کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔



مثلث اب ج کے ضلع ب ج کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو اضلاع اب، اج کو یا اضلاع مدودہ کو بالترتیب لا اور ما پر کاٹتا ہے، ثابت کرنا ہے کہ $الا : لا ب = اما : ماج$ ۔
 شکل ۱ میں نقاط لا اور ما بالترتیب اب، اج کی داخلی تقسیم کرتے ہیں۔

اشکال ۱ اور ۲ میں نقاط لا اور ما بالترتیب اب اور اج کی خارجی تقسیم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ لا اور لا ب کے طولوں کا وفق مشترک طول ط ہے نیز فرض کرو کہ لا میں طول ط م دفعہ شریک ہے اور لا ب میں طول ط ن دفعہ شریک ہے۔

$$\text{تب } لا = م \times ط \text{ اور } لا ب = ن \times ط$$

$$\therefore لا : لا ب = م \times ط : ن \times ط = م : ن \dots (۱)$$

لا اور لا ب کو طول ط والے حصوں میں تقسیم کرو اور نقاط تقسیم میں سے ب ج کے متوازی خطوط کھینچو۔ ان خطوط کے ذریعہ اما اور ماج بالترتیب مساوی طول والے م اور ن حصوں میں تقسیم ہو جائیں گے۔ فرض کرو کہ ان حصوں میں سے ہر ایک کا طول = ل

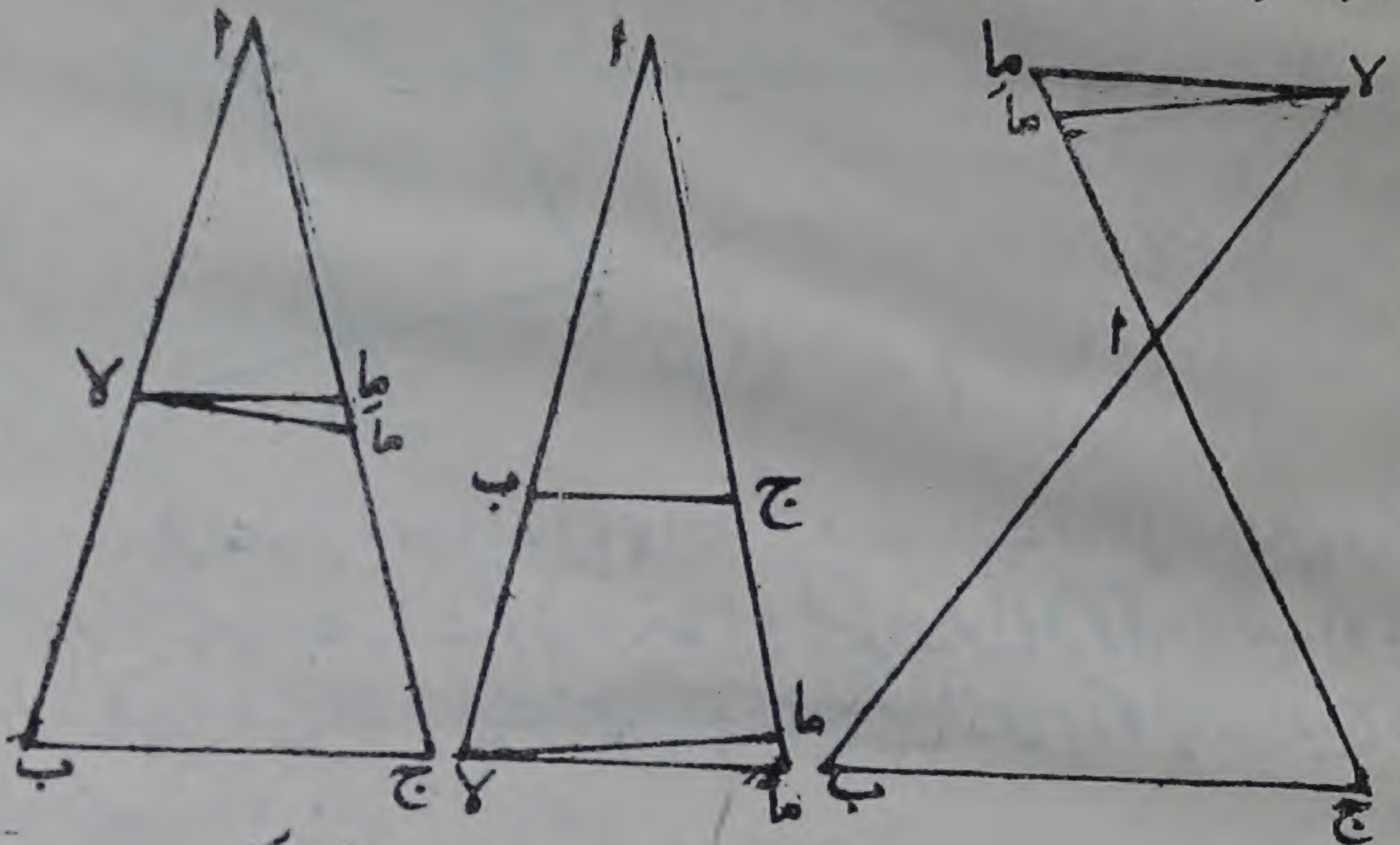
$$\text{تب } اما = م \times ل \text{ اور } ماج = ن \times ل$$

$$\therefore اما : ماج = م \times ل : ن \times ل = م : ن \dots (۲)$$

پس (۱) اور (۲) سے $الا : لا ب = اما : ماج$ یہی ثابت کرنا تھا۔
 نوٹ۔ شکل ۱ میں لا : لا ب اور نیز اما : ماج دونوں مثبت ہیں اور مقدار میں مساوی ہیں۔

اشکال (۲) اور (۳) میں لا : لا ب اور نیز اما : ماج دونوں منفی ہیں اور مقدار میں مساوی ہیں۔

مسئلہ بالا کا عکس یہ ہے :- اگر مثلث ABC کے اضلاع AB ، AC پر بالترتیب
نقاط A' اور A'' اس طرح لیے جائیں کہ (بلحاظ مقدار اور علامت کے)
 $AA' : AB = AA'' : AC$: مآج : مآ : مآ : مآ ج کے



اگر AA' متوازی نہیں ہے AB کے AA' متوازی AB ج کے کھینچو۔

فرض کرو کہ AA' اضلاع AB سے AA' پر ملتا ہے۔

چونکہ AA' AB ج اس لیے $AA' : AB = AA'' : AC$: مآ : مآ ج

لیکن دیا گیا ہے کہ $AA' : AB = AA'' : AC$: مآ : مآ ج

اس لیے $AA' : مآ : مآ ج = AA'' : مآ : مآ ج$

اس لیے نقطہ AA' ، منطبق ہے نقطہ AA'' پر

پس ثابت ہوا کہ AA' متوازی ہے AB ج کے

نوٹ : مسئلہ بالا کے ثبوت میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ AA' اور AA'' متوازی

مقداریں ہیں۔ اگر AA' اور AA'' غیر متوازی ہوں تو کسی بہت چھوٹی اکائی کی رقومیں

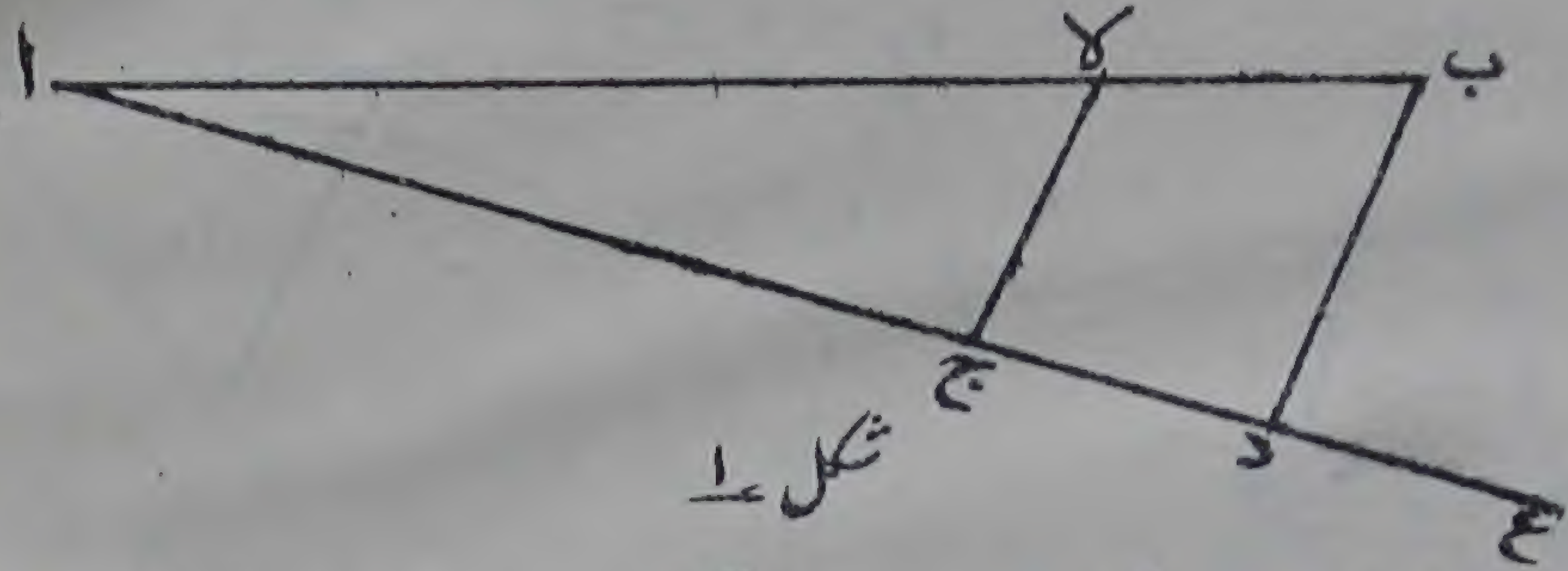
ان دونوں طولوں کو ناپنے سے $AA' : AB = AA'' : AC$ کی تقریبی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے اور ثابت

کیا جاسکتا ہے کہ $AA' : مآ : مآ ج = AA'' : مآ : مآ ج$ کی تقریبی قیمت کے مساوی ہے۔

نتیجہ صریح : اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط کو دو خطوط مستقیم قطع

کریں تو ایک قاطع پر کے مقطوعوں کے طول دوسرے قاطع پر کے متناظر مقطوعوں کے

طولوں کے تناسب ہونگے۔
۱۔ مسئلہ عملی - ایک دیے ہوئے خط کو داخلہ اور خارجہ ایک ہی ہوئی نسبت میں تقسیم کرنا۔
 داخلی تقسیم - [دیکھو شکل ۱۔]

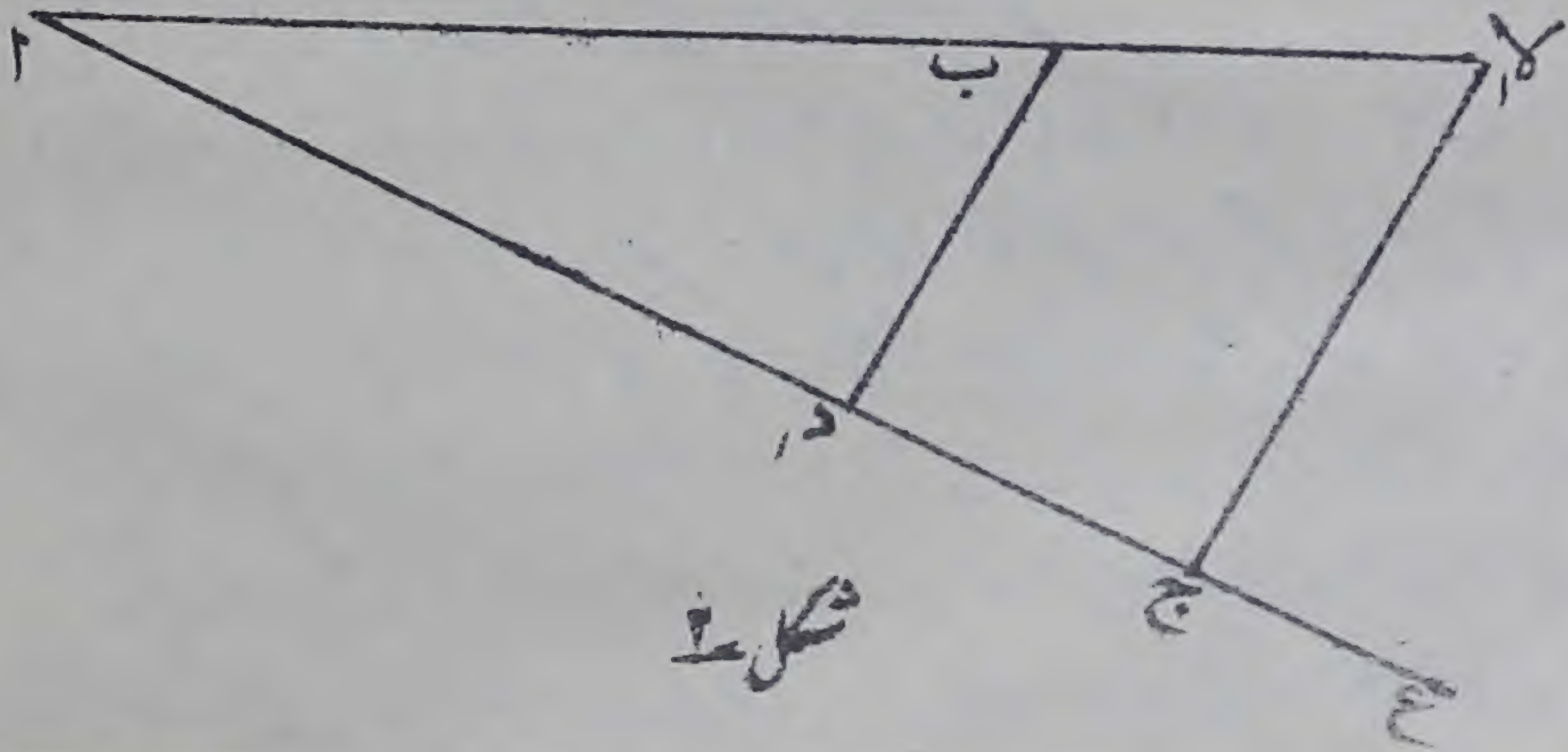


شکل ۱۔

فرض کرو کہ اب ایک دیا ہوا خط مستقیم ہے۔ اسے داخلہ نسبت م:ن میں تقسیم کرنا مقصود ہے۔ اسے کوئی اور خط اے بھینچو اور طول کی کوئی مناسب اکائی لے کر اے پر نقاط ج اور د ایسے معلوم کرو کہ ا ج میں ایسی م اکائیاں اور ج د میں ایسی ن اکائیاں شامل ہوں۔

د ب کو ملاؤ اور د ب کے متوازی ج لا بھینچو جو اب سے لا پر لے تب نقطہ لا خط اب کو داخلہ دی ہوئی نسبت م:ن میں تقسیم کریگا۔ چونکہ ج لا متوازی ہے مثلث اب د کے ضلع د ب کے

اس لیے $لا:اب = ا ج:ج د = م:ن$
 خارجی تقسیم [دیکھو شکل ۲۔]

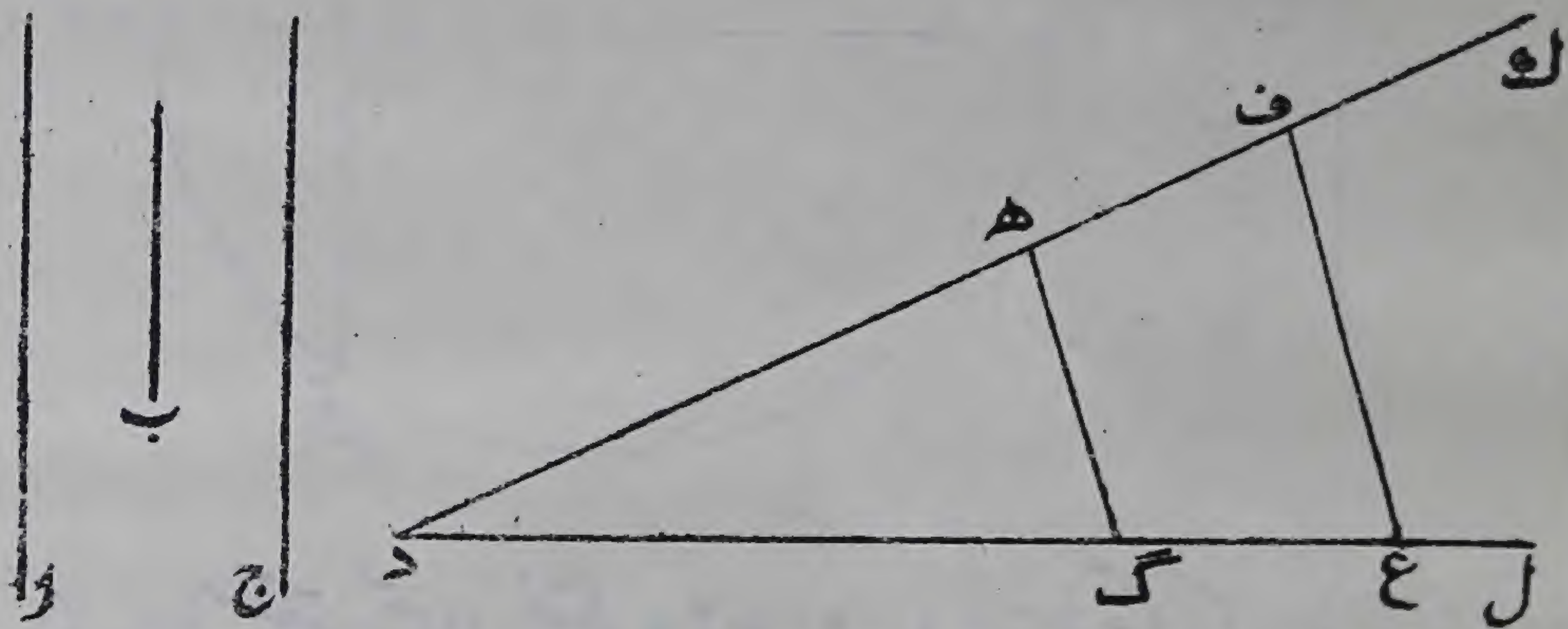


شکل ۲۔

اس لیے ا ل ا : ل ا ب = ا ج : ج د = م : ن
 پس اب کی داخلی تقسیم لا پر اور خارجی تقسیم لا پر دی ہوئی نسبت م : ن میں ہوتی ہے
 نوٹ۔ مان لیا گیا ہے کہ دی ہوئی نسبت دو صحیح عددوں کی نسبت سے تعبیر کی جاسکتی ہے

۱۸۔ مسئلہ عملی۔ تین دیے ہوئے خطوط 'آ' 'ب' 'ج' کا چوتھا متناسب معلوم کرنا۔

کوئی دو متقاطع خط دل، دل کہیں پر تقاطع اور



ایسے معلوم کرو کہ دگ = ا اور گ = ع = ب اور دگ پر نقطہ ہا ایسا معلوم کرو کہ
د = ج

کھ کو ملاؤ اور گھ کے متوازی ع ف کھینچو جو د ک سے ف پر ملے۔

تبہ ف چوتھا متناسب ہوگا معلومہ خطوط از باب ج کا

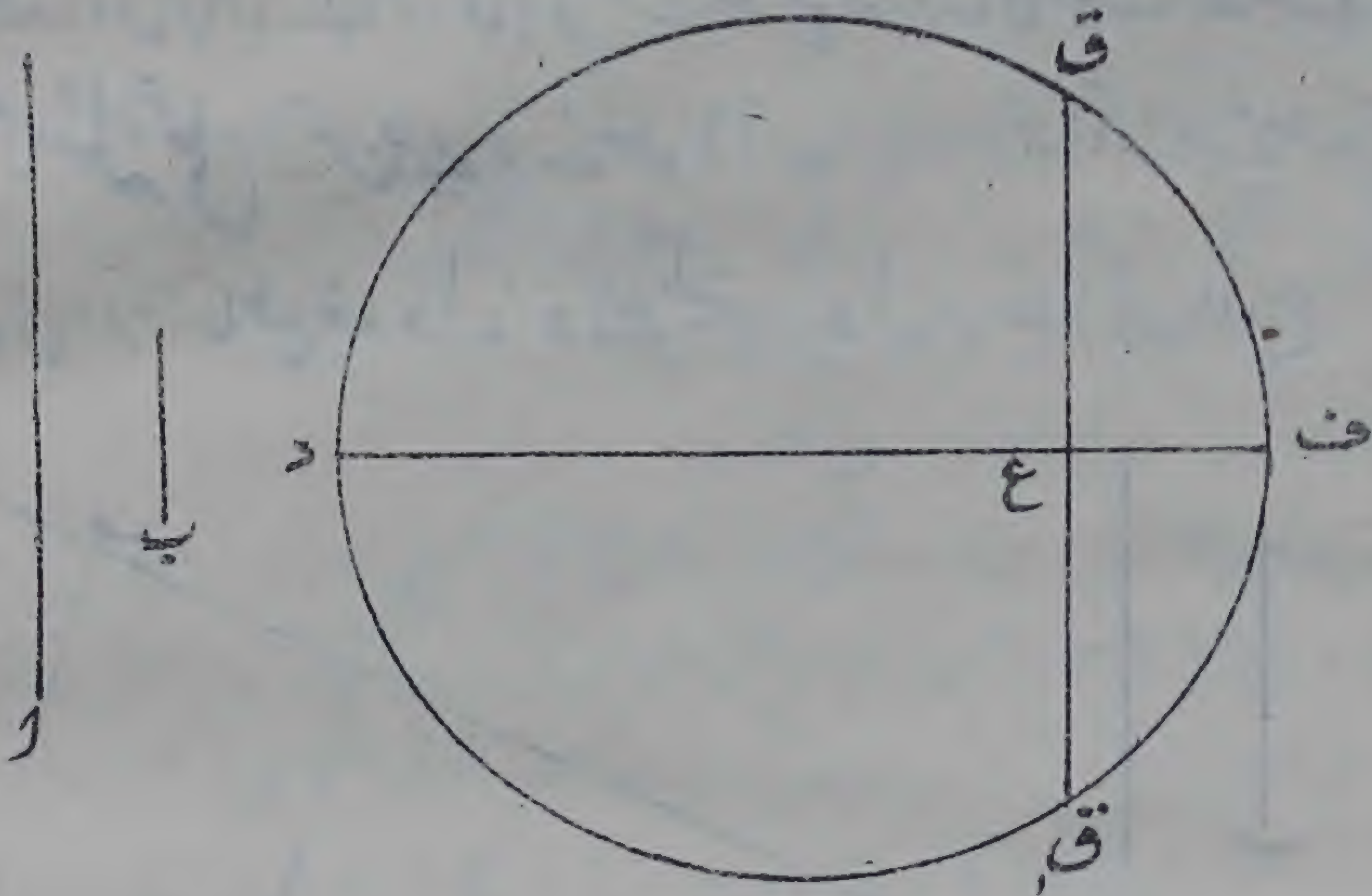
چونکہ مثلث د ع ف میں گھ // ع ف

اس لیے دگ : گ ع = دھ : ھ ف

یعنی $ا : ب = ج : ح$ ف

پس ثابت ہوا کہ $ح$ ف چوتھا متناسب ہے $ا$ ب $ج$ کا
 نقطہ : تیسرے متناسب کی تعریف سے ظاہر ہے کہ $ا$ اور $ب$ کا تیسرا
 متناسب فی الحقیقت $ا$ ب $ب$ کا چوتھا متناسب ہے۔
 اس لیے مندرجہ بالا مسئلہ علی کے طریقہ سے دو دیے ہوئے خطوط مستقیم
 $ا$ اور $ب$ کا تیسرا متناسب معلوم کیا جاسکتا ہے۔

۱۹۔ مسئلہ علی۔ دو دیے ہوئے خطوط $ا$ اور $ب$ کے درمیان
 وسط متناسب معلوم کرنا۔



ایک خط مستقیم پر تین نقطے $د$ ، $ع$ ، $ف$ ایسے معلوم کرو کہ

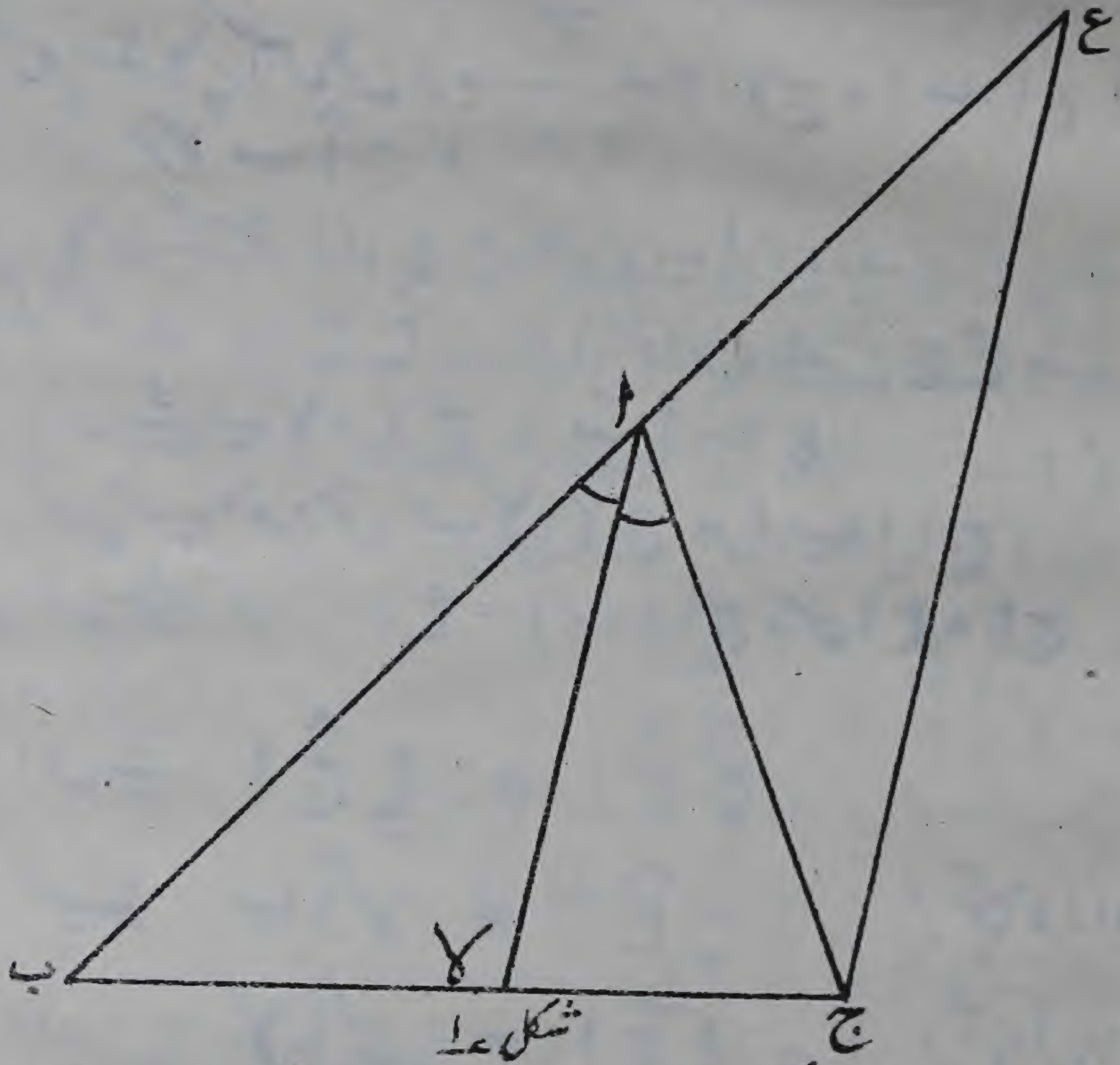
$$د = ع \text{ اور } ع = ف = ب$$

$د$ ف کو قطر مان کر دائرہ کھینچو اور $ع$ میں سے ایک خط $ق$ $ع$ ق کھینچو
 جو $د$ ف پر عمود ہے اور دائرہ سے $ق$ اور $ق$ پر ملتا ہے۔

تب $ع$ ق وسط متناسب ہوگا دیے ہوئے خطوط $ا$ اور $ب$ کے درمیان۔
 چونکہ قطر $د$ ف عمود ہے وتر $ق$ ق پر
 اس لیے $ع$ ق = $ع$ ق

نیز ق ق اور د ف کے حصوں کے حاصل ضرب مساوی ہیں
 یعنی $ق ق \times ع = ق ق \times د = ع ف$
 یعنی $ق^2 = ا \times ب$ یعنی $ا : ع = ق : ب$

پس معلوم ہوا کہ ع ق وسط تناسب ہے ا اور ب کے درمیان۔
 نوٹ: مندرجہ بالا عمل کے متبادل ثبوت کے لیے دیکھو مسئلہ ۳۔ مثال ۱۰۔
 ۲۰۔ مسئلہ۔ مثلث کے کسی زاویہ کا داخلی (خارجی) ناصف مقابل
 کے ضلع کو باقی دو اضلاع کی نسبت میں داخل (خارجاً) تقسیم کرتا ہے۔
 حصہ اول (داخلی ناصف) (دیکھو شکل ۱۔)



مثلث ا ب ج کے زاویہ ب ا ج کا داخلی ناصف مقابل کے
 ضلع ب ج سے نقطہ لا پر ملتا ہے ثابت کرنا ہے کہ
 $ب : لا : ج = ا : ب : ج$

لا کے متوازی ج ع کھینچو جو ب ا محدودہ سے ع پر ملے
 سب ب آ لا = ا ع ج (متناظر زاویے)
 اور لا آ ج = ا ج ع (مبادل زاویے)
 لیکن حسب مفروض ب آ لا = لا آ ج
 اس لیے ا ع ج = ا ج ع

ث ا ج = ا ع (۱)
 چونکہ مثلث ب ج ع میں لا ا متوازی ہے ضلع ج ع کے
 اس لیے ب لا : لا ج = ب ا : ا ع

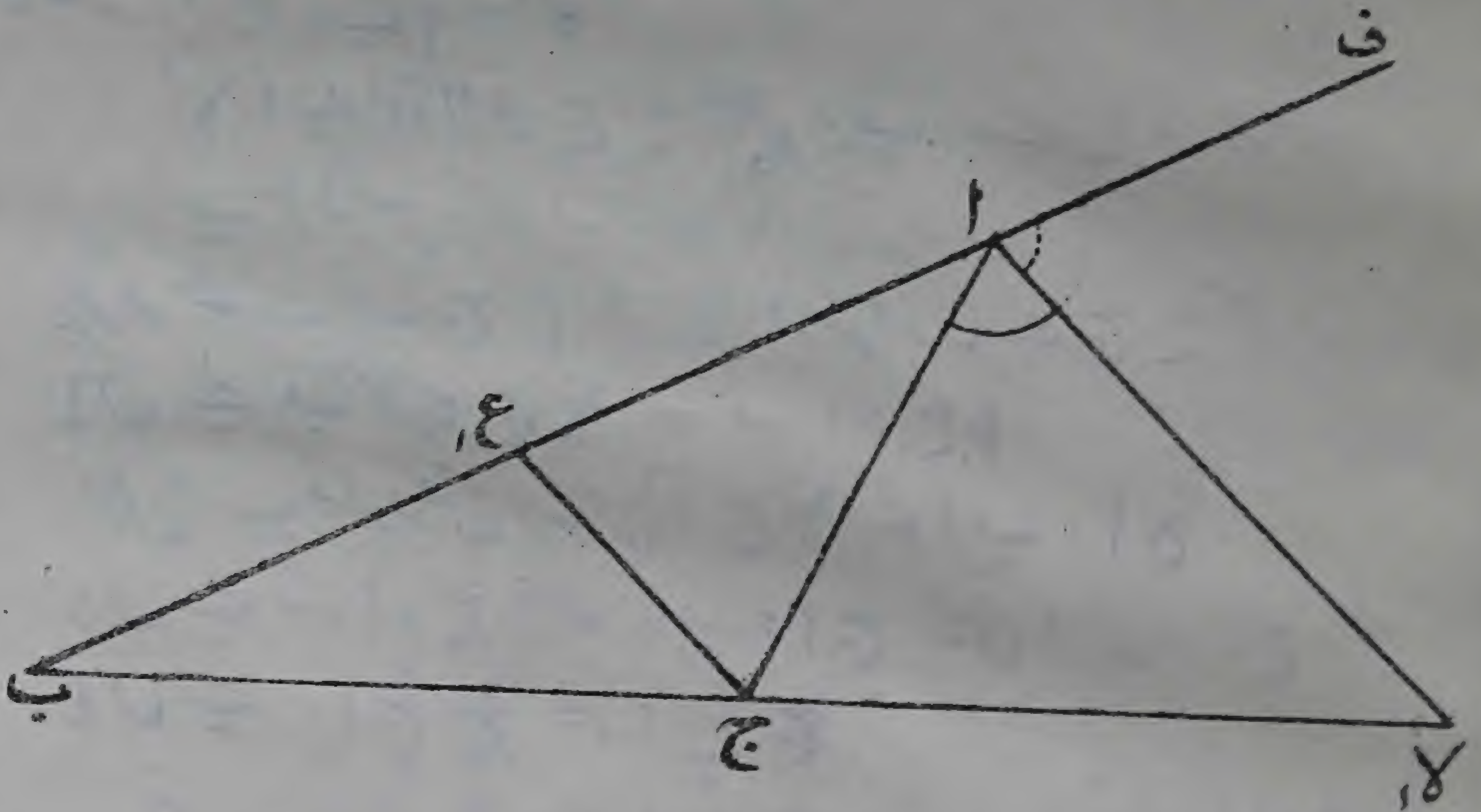
ب ا : ا ج = ب ا : ا ج بموجب (۱) - یہی ثابت کرنا تھا۔
 مندرجہ بالا مسئلہ کا عکس — اگر مثلث ا ب ج میں ضلع ب ج کی
 داخلی تقسیم نقطہ لا پر اس طرح کی جائے کہ ب لا : لا ج = ا ب : ا ج تو لا ا
 داخلی ناصف ہوگا ب آ ج کا

لا کے متوازی ج ع کھینچو جو ب ا محدودہ سے ع پر ملے
 چونکہ مثلث ب ج ع میں لا ا متوازی ہے ضلع ج ع کے
 اس لیے ب لا : لا ج = ب ا : ا ع
 لیکن حسب مفروض ب لا : لا ج = ا ب : ا ج
 اس لیے ب ا : ا ع = ا ب : ا ج یعنی ا ع = ا ج

اس لیے ا ج ع = ا ع ج
 نیز ب آ لا = ا ع ج (متناظر زاویے)
 اور لا آ ج = ا ج ع (مبادل زاویے)
 اس لیے ب آ لا = لا آ ج

یعنی لا داخلی ناصف ہے ب آ ج کا - یہی ثابت کرنا تھا۔

حصہ دوم (خارجی ناصف) (دیکھو شکل ۲)



شکل ۲

مثلث ا ب ج کے زاویہ ب ا ج کا خارجی ناصف مقابل کے منقطع ب ج سے
لا پر ملتا ہے ثابت کرنا ہے کہ ب ل : ج ل = ا ب : ا ج
لا کے متوازی ج ع کھینچو جو ا ب سے ع پر ملے۔
ب ا کو کسی نقطہ ف تک خارج کرو۔

(متناظر زاویے)
(متبادل زاویے)

تب ف ا ل = ا ع ج
اور ل ا ا ج = ا ج ع
لیکن حسب مفروض ف ا ل = ل ا ا ج
اس لیے ا ع ج = ا ج ع

اس لیے ا ج = ا ع (۱)
چونکہ مثلث ب ج ع میں ل ا متوازی ہے ج ع کے
اس لیے ب ل : ج ل = ب ا : ا ع
= ا ب : ا ج بموجب (۱)

یہی ثابت کرنا تھا۔

مندرجہ بالا مسئلہ کا عکس۔ اگر مثلث اب ج میں ضلع ب ج کی خارجی تقسیم نقطہ لا پیرا اس طرح کی جائے کہ ب لا : ج لا = اب : اج تو لا خارجی ناصف ہوگا ب آج کا

لا کے متوازی ج ع کھینچو جو ب اسے ع پر ملے
ب آ کو کسی نقطہ ف تک خارج کرو۔

چونکہ مثلث ب ج ع میں لا متوازی ہے ج ع کے
اس لیے ب لا : ج لا = ب ا : ا ع

لیکن حسب مفروض ب لا : ج لا = اب : اج

اس لیے ب ا : ا ع = اب : اج یعنی ا ع = اج

اس لیے ا ج ع = ا ع ج

(متناظر زاویے)

نیز ف ا لا = ا ع ج

(متبادل زاویے)

اور لا ا ج = ا ج ع

اس لیے ف ا لا = لا ا ج

یعنی لا خارجی ناصف ہے ب آج کا۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ : اگر مثلث اب ج میں اب = اج تو ب آج کا داخلی ناصف

مقابل کے ضلع ب ج کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے۔ یعنی قاعدہ کو اضلاع کی نسبت
یعنی ۱ : ۱ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جو مسئلہ بالا کے عین مطابق ہے۔

نیز ب آ ج کا خارجی ناصف قاعدہ ب ج کے متوازی ہے اور
اس لیے قاعدہ سے لاتنا ہی پر ملتا ہے۔ یعنی قاعدہ کی خارجی تقسیم : ا کی
نسبت میں کرتا ہے یہ بھی مسئلہ بالا کے عین مطابق ہے۔

۲۱۔ **تعمیر** : اگر ایک خط مستقیم اب کی داخلی تقسیم نقطہ لا

پر اور خارجی تقسیم نقطہ ما پیرا اس طرح کی جائے کہ لا : اب = اما : ب ما
تو کہا جاتا ہے کہ اب کی موسیقی تقسیم لا اور ما پر کی گئی ہے۔

ما ب لا ا

بلحاظ Δ اور Δ کے نقاط Δ اور Δ ایک دوسرے کے موسیقی مزدوج

کہلاتے ہیں۔

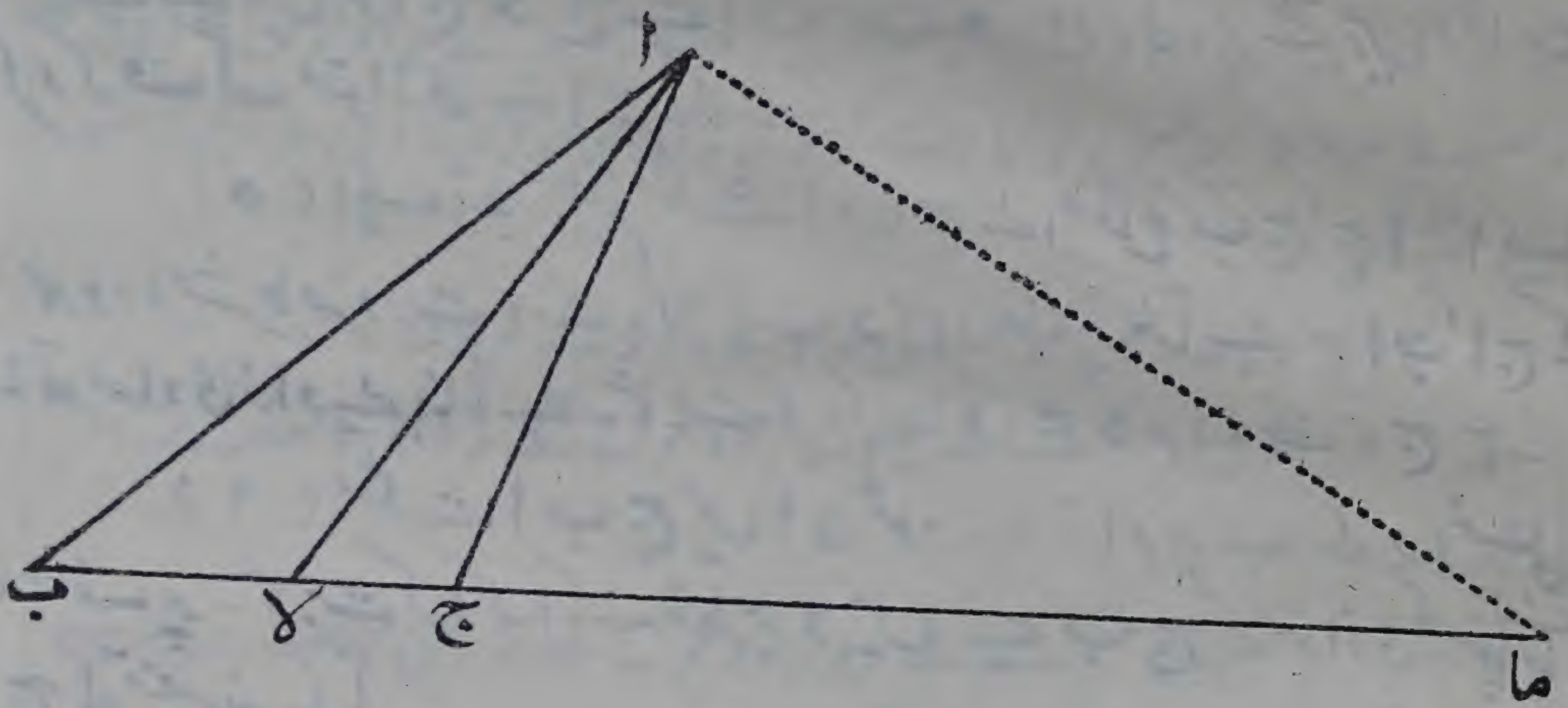
نوٹ (۱) دفعہ ۲۰ کے مسئلہ سے ظاہر ہے کہ مثلث کے کسی زاویہ کے داخلی

اور خارجی ناصف مقابل کے ضلع کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔

نوٹ (۲) ایک دیے ہوئے قاعدہ Δ پر کوئی مثلث Δ ج ایسا

بنایا گیا ہے کہ Δ : Δ ایک مستقل مقدار ہے۔ اگر Δ Δ کے داخلی اور خارجی

ناصف قاعدہ Δ ج سے بالترتیب Δ اور Δ پر ملیں تو Δ اور Δ اس Δ



کے تمام مقاموں کے لیے ثابت نقطے ہونگے۔ نیز Δ Δ قائمہ ہے اس لیے

دی ہوئی شرائط کے ماتحت اس Δ کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا قطر Δ ہے۔

نوٹ (۳) اگر ایک دیے ہوئے خط Δ ج کی موسیقی تقسیم Δ Δ پر کی جائے

اور Δ Δ قطر پر کے دائرہ پر کوئی نقطہ Δ ہو تو ثابت کیا جاسکتا ہے کہ Δ : Δ ایک

مستقل مقدار ہے (دیکھو دفعہ ۹۳ باب ۷)۔

Δ Δ کو قطران کرکھنچے ہوئے دائرہ کو اپولونیئس (Appolonius)

کا دائرہ کہتے ہیں اور یہ دائرہ اس نقطہ کا طریق ہے جس کے فاصلے دو ثابت

نقطوں سے مستقل نسبت میں رہتے ہیں۔

امثلہ ۲

(۱) ثابت کرو کہ مثلث کے کسی دو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو طائرہ والا

تیسرے ضلع کے متوازی ہے۔

(۲) مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے ایک خط قاعدہ کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط دوسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ منحرف کے غیر متوازی ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط متوازی اضلاع کے متوازی ہوتا ہے۔

(۴) مثلثات ا ب ج، د ب ج مشترک قاعدہ ب ج کے ایک ہی طرف واقع ہیں قاعدہ کے کسی نقطہ ع میں سے با ا اور ب د کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں جو ا ج، د ج سے بالترتیب ف اور گ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ف گ متوازی ہے ا د کے۔

(۵) ایک خط مستقیم مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب (محدودہ بشرط ضرورت) سے بالترتیب د، ع، ف پر ملتا ہے اور ا ب، ا ج کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ ب د : ج د = ب ف : ج ع۔

(۶) مثلث ا ب ج میں ا د عمود ہے زاویہ ب کے داخلی ناصف پر۔ ثابت کرو کہ ایک خط جو د میں سے ب ج کے متوازی کھینچا جائے ا ج کی تنصیف کرتا ہے۔

(۷) ا ب، ج، د چارہم خط نقطے ہیں (اسی ترتیب میں)۔ اس خط پر ایک نقطہ و ایسا معلوم کرو کہ او : وو = ب : و : و ج

(۸) مثلث ا ب ج میں لا ما متوازی ہے ب ج کے اور اب، ا ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملتا ہے۔

(ا) اگر اب = ۳ و ۶، ا ج = ۴ و ۲ اور لا = ۲ و ۱ تو ا ما محسوب کرو

[جواب ۴ و ۱]

(ب) اگر اب = ۲، ا ج = ۵ و ۱ اور ا ما = ۴ و ۹ تو ب لا محسوب کرو۔

[جواب ۸ و ۰]

(ج) اگر لا : لا ب = ۳ : ۸ اور ا ج = ۸ و ۸ سم تو ا ما محسوب کرو۔

[جواب ۴ و ۶ سم]

(۹) مثلث اب ج میں $\angle = 50^\circ$ ، $\angle = 40^\circ$ اور $\angle = 30^\circ$ ج = 40° زاویہ ا کے داخلی اور خارجی منصف ضلع ب ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملتے ہیں۔ ب لا اور ب ما کے طول محسوب کرو۔ [جواب 30° ، 40° ، 50°]

(۱۰) مثلث اب ج کا ایک وسطانیہ ا د ہے زاویوں ا د ب اور ا د ج کے داخلی ناصف اب، ا ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ لا ما متوازی ہے ب ج کے۔

(۱۱) اگر ذواربعتہ الاضلاع اب ج د کے زاویوں ا اور ج کے ناصف ب د پر ملیں تو ثابت کرو کہ زاویوں ب اور د کے ناصف ا ج پر ملینگے۔

(۱۲) دفعہ ۲۰ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ (۱) مثلث کے تینوں زاویوں کے داخلی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔

(ب) مثلث کے دو زاویوں کے خارجی ناصف اور تیسرے زاویہ کا داخلی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔

(۱۳) مثلث کا قاعدہ، اسی زاویہ اور باقی اضلاع کی نسبت معلوم نہیں، مثلث بناؤ۔

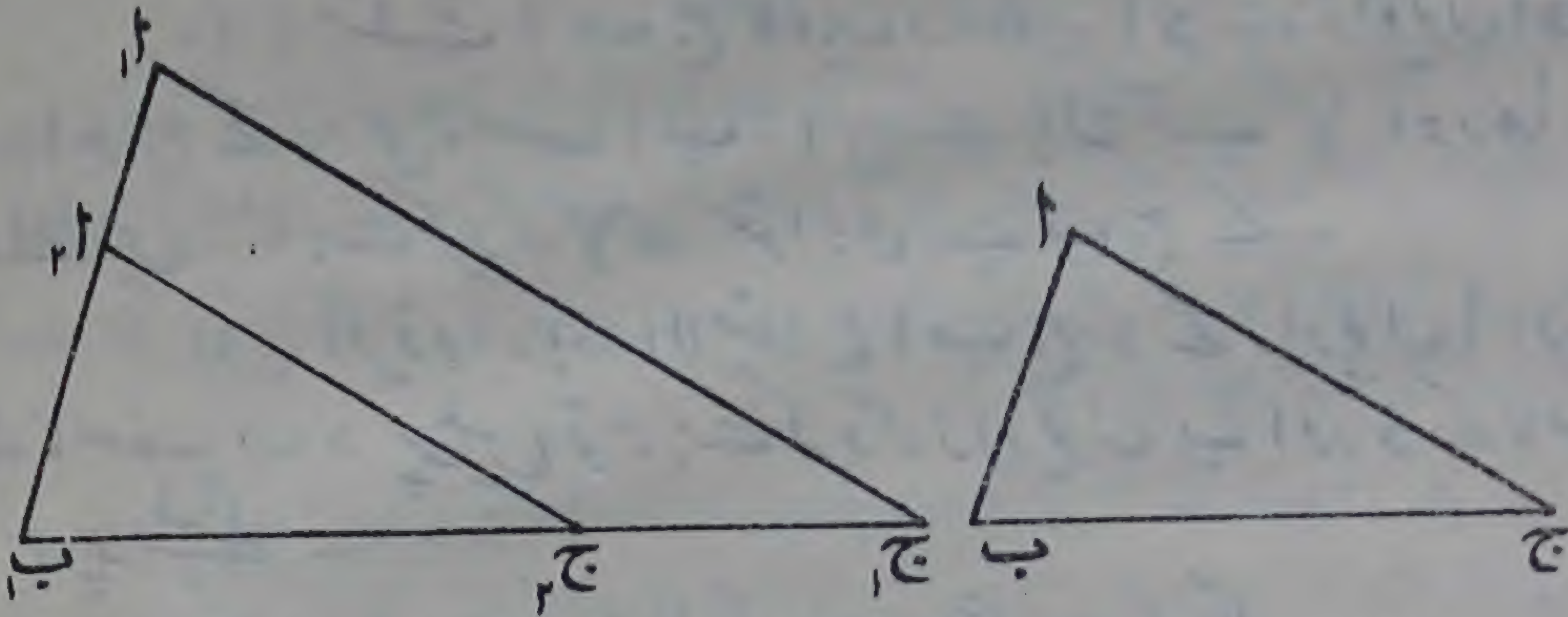
۲۲۔ متشابه اشکال۔

تعریفات۔ اگر دو مستقیم الاضلاع اشکال ایسی ہوں کہ ایک کے زاویے دوسری شکل کے زاویوں کے جدا جدا ایک ہی ترتیب میں مساوی ہوں اور ایک کے ضلع دوسری شکل کے نظیر کے ضلعوں کے متناسب ہوں تو یہ اشکال ایک دوسری کے متشابه کہلاتی ہیں یا مختصراً ان کو متشابه اشکال کہتے ہیں۔

اگر ایک مستقیم الاضلاع شکل کے زاویے جدا جدا ایک ہی ترتیب میں

دوسری مستقیم الاضلاع شکل کے زاویوں کے مساوی ہوں تو یہ اشکال مساوی الزوایا کہلاتی ہیں۔

۲۴۔ مسئلہ۔ اگر دو مثلث مساوی الزوایا ہوں تو ان کے نظیر کے ضلع متناسب ہوتے ہیں۔



مثلثات اب ج، ا ب ج، میں $\hat{A} = \hat{A'}$ ، $\hat{B} = \hat{B'}$ اور
(لازمًا) $\hat{C} = \hat{C'}$ ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

ب ا پر نقطہ ا م ایسا لو کہ ب ا م = ب ا اور ب ج، پر
نقطہ ج م ایسا لو کہ ب ج م = ب ج،
ا م ج م کو ملاؤ۔

تب مثلثات ب ا م ج اور ب ا ج، طرح سے باہم مساوی ہونگے۔

اس لیے ب ا م ج، = ب ا ج،

اور حسب مفروض ب ا ج، = ب ا ج،

اس لیے ب ا م ج، = ب ا ج،

اس لیے ا م ج، // ا ج،

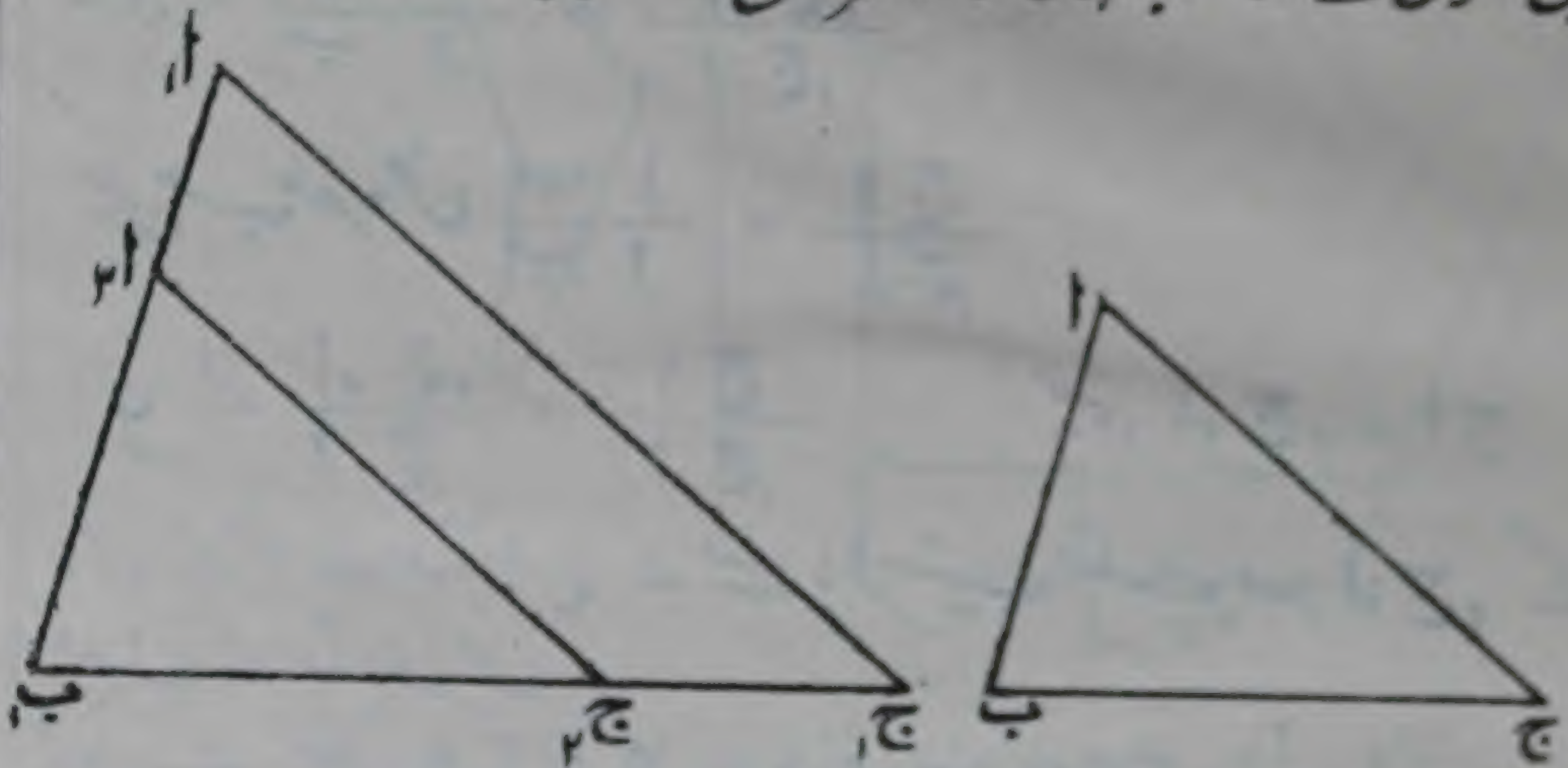
$$\text{اس لیے } \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{BC}$$

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{ب}{ب} = \frac{ج}{ج} \text{ یعنی}$$

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{ا}{ا} = \frac{ب}{ب} \text{ اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ}$$

$$(۱) \text{ اور } (۲) \text{ سے حاصل ہوتا ہے کہ } \frac{ب}{ب} = \frac{ج}{ج} = \frac{ا}{ا} \text{ جو}$$

ثابت کرنا تھا۔
۲۴ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کے تین ضلع دوسرے مثلث کے
 تین ضلعوں کے متناسب ہوں تو متناظر اضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی ہونگے۔



مثلثات $ا ب ج$ اور $ا ب ج$ میں $\frac{ب}{ب} = \frac{ج}{ج} = \frac{ا}{ا}$

ثابت کرنا ہے کہ $\hat{ا} = \hat{ا}$ ، $\hat{ب} = \hat{ب}$ اور (لازمًا) $\hat{ج} = \hat{ج}$
 $ا$ پر نقطہ $ا$ ایسا لو کہ $ا ب = ا ب$ اور $ب ج$ پر نقطہ $ج$ ایسا لو کہ
 $ب ج = ب ج$ -

$ا ج$ کو ملاؤ۔

$$\text{چونکہ حسب مفروض } \frac{ب}{ب} = \frac{ا}{ا} = \frac{ج}{ج}$$

$$\text{اس لیے } \frac{ب}{ب} = \frac{ا}{ا} = \frac{ج}{ج} \text{ (حسب عمل)}$$

اس لیے $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ // $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

یعنی مثلثات $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ اور $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ میں $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ اور $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

اور $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ اور $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

اس لیے یہ مثلثات متساوی الزوایا ہیں۔

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

یعنی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ اور $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

اس لیے مثلث $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ کے ضلع بالترتیب مثلث $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ کے ضلعوں کے مساوی ہیں۔

اس لیے یہ مثلثات آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

پس ثابت ہوا کہ مثلثات $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ اور $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ متساوی الزوایا ہیں۔

۲۵۔ متشابه اشکال پر نوٹ۔ تعریف سے ظاہر ہے کہ متشابه

اشکال کے لیے دو شرائط کا ایک ساتھ پورا ہونا ضروری ہے۔

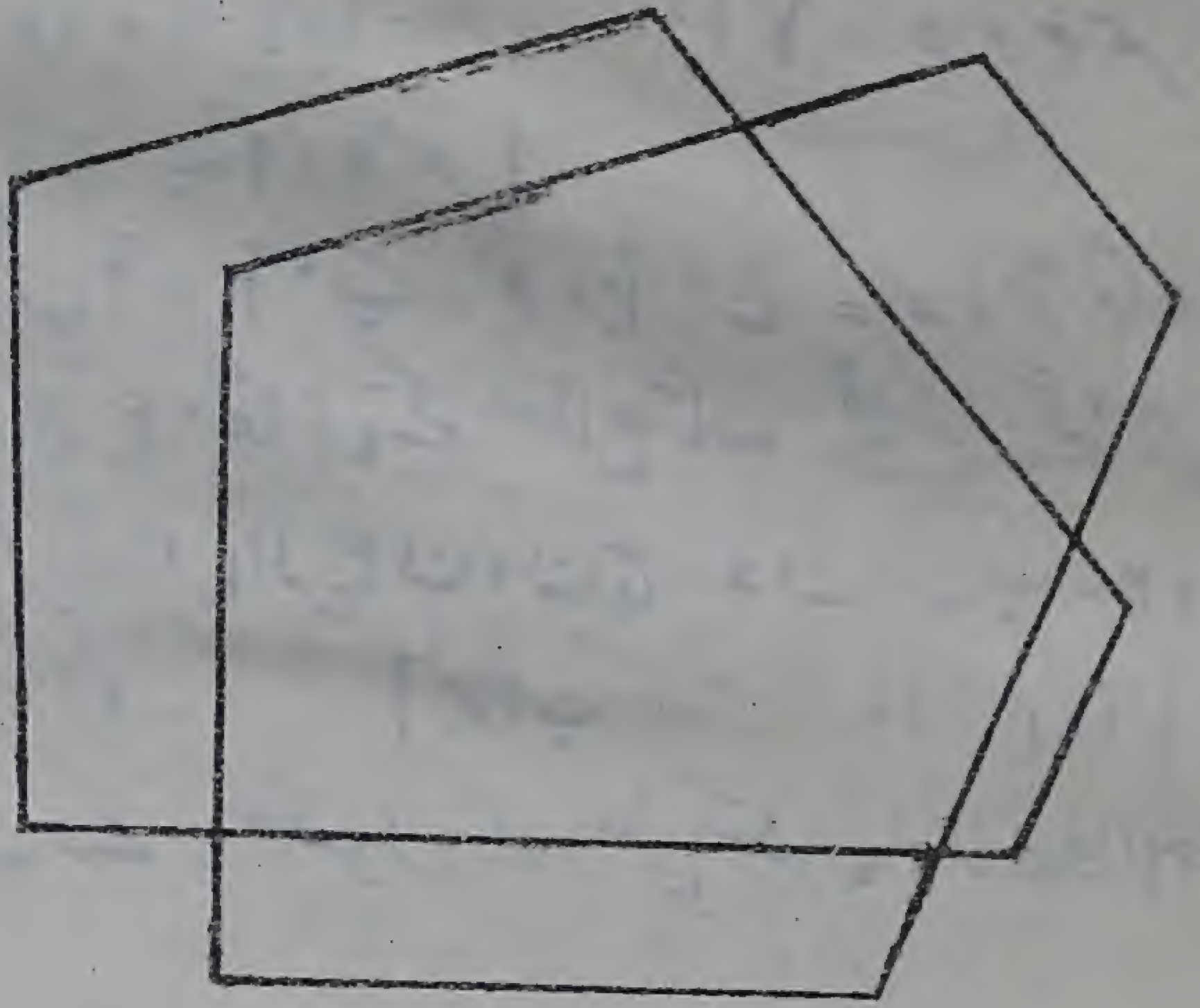
(۱) ایک شکل کے زاویے ایک ہی ترتیب میں جدا جدا دوسری شکل

کے زاویوں کے مساوی ہوں۔

(۲) ایک شکل کے قطعے متناسب ہوں دوسری شکل کے نظیر کے ضلعوں کے۔
 دفعات ۲۳ اور ۲۴ سے ظاہر ہے کہ مثلثات کی صورت میں مندرجہ
 بالا شرائط میں سے کسی ایک شرط کے پورا ہونے پر دوسری شرط لازماً خود بخود پوری ہوتی ہے۔
 لیکن تین سے زیادہ ضلعوں والی اشکال کی صورت میں ان کے باہم
 متشابه ہونے کے لیے دونوں شرائط کا ایک ساتھ پورا ہونا ضروری ہے۔
 اس امر کی توضیح اشکال ذیل سے ہوتی ہے۔



شکل ۱



شکل ۲

شکل ۱ میں ایسے دو کثیر الاضلاع دیے گئے ہیں جو شرط (۱) کو پورا
 کرتے ہیں اور شرط (۲) کو پورا نہیں کرتے۔ شکل سے ظاہر ہے کہ یہ کثیر الاضلاع
 متشابه نہیں ہیں۔

شکل ۲ میں ایسے دو کثیر الاضلاع دیے گئے ہیں جو شرط (۲) کو پورا
 کرتے ہیں لیکن شرط (۱) کو پورا نہیں کرتے۔ شکل سے ظاہر ہے کہ یہ کثیر الاضلاع
 بھی متشابه نہیں ہیں۔

اس امر کی ایک اور سادہ مثال ذیل میں درج ہے۔
 ایک مربع اور مستطیل متساوی الزوایا ہیں لیکن ان کے نظیر کے اضلاع
 متناسب نہیں ہیں۔ اس لیے یہ دو اشکال متشابه نہیں ہیں۔ نیز ایک مربع اور مستطیل
 ضلع متناسب ہیں لیکن اشکال متساوی الزوایا نہیں ہیں اس لیے یہ بھی متشابه نہیں ہیں۔

امثلہ ۳

(۱) مثلث ا ب ج میں لا ما متوازی ہے ب ج کے اور اضلاع ا ب، ا ج سے نقاط لا، ما پر ملتا ہے۔

(ا) اگر ا ب = ۴، ب ج = ۶، لا = ۳، ا لا = ۴، تو لا ما معلوم کرو۔
[جواب ا د ۲]

(ب) اگر ب ج = ۴، لا ما = ۵، سم، ا لا = ۵، و سم، تو ا ب معلوم کرو۔
[جواب ۹ د ۹ سم]

(۲) مثلث ا ب ج میں ا = ۲، ب = ۵، ج = ۵، قاعدہ کے سروں میں سے خطوط ب د اور ج ع مقابل کے اضلاع تک کھینچے گئے ہیں اور وہ ایک دوسرے کو ن پر قطع کرتے ہیں اگر ا ن : ن ج = د ن : ن ب = ۲ : ۵ تو ع د، ا ع اور ج د کے طول معلوم کرو۔
[جواب ۸ د ۸، ۴ د ۴، ۴ د ۴]

(۳) ثابت کرو کہ مثلث کے دو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط قاعدہ کا نصف ہے۔

(۴) ایک دائرہ کے دو وتر ا ب اور ج د ایک دوسرے کو نقطہ ط پر قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ ا ط x ط ب = ج ط x ط د
(۵) ایک بیرونی نقطہ سے دائرہ کا محاس ویت کھینچا گیا ہے اور وہیں سے گزرنے والا کوئی قاطع دائرہ کو ا اور ب پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ و ا x و ب = و ت۔

(۶) مثلث ا ب ج کے اندرونی اور باہری دائروں کے مرکز معمولی ترقیم کے مطابق اے، بے، جے، دے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$(ا) جے x جے = اے x اے$$

$$(ب) اے x بے = بے x جے$$

$$جے x دے = دے x اے$$

(۷) مثلث ا ب ج کا اندرونی مرکز اے ہے، میں سے ایک خط

طبیعی کیا ہے جو ہے اور اب' اج سے بالترتیب د' ع پر ملتا ہے

ثابت کرو کہ $د \times ج = ع$ (۸) مثلث اب ج کے رأسوں سے مقابل کے اضلاع پر عمود ا د' ب' ع' ج ف نکالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثات ا ع ف، ب د ف، ج د ع میں سے ہر ایک مثلث اب ج کے متشابه ہے۔ اس کی مدد سے مثلث د ع ف کے اضلاع کے طول مثلث اب ج کے اضلاع اور زاویوں کی رقوم میں معلوم کرو۔

[جواب ع ف = ا ج م ا]

(نوٹ۔ مثلث د ع ف کو مثلث اب ج کا مثلث پائین کہتے ہیں)۔

(۹) مثلث اب ج بناؤ جس میں $ا = ۹۰$ ، $ب = ۳$ ، $ج = ۴$ اور محیط = ۱۸۔ اس کے اضلاع کے طول معلوم کرو۔ [جواب $ا = ۵$ ، $ب = ۵$ ، $ج = ۵$ ، $محیط = ۱۵$]۔
(۱۰) مثلث اب ج میں $ا$ قائمہ ہے اور ا د وتر ب ج پر عمود ہے، ثابت کرو کہ مثلثات اب د، ج ا د، ج ب ا باہم متشابه ہیں اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ

$$(۱) ا د = ب د \times ج د$$

$$(۲) ا ب = ب د \times ج ب$$

$$(۳) ا ج = ج د \times ج ب$$

$$(۴) ا ب + ا ج = ب ج$$

$$(۵) ب د : د ج = ا ب : ا ج$$

(۱۱) مثلث اب ج میں ا د عمود ہے ب ج پر اور ا ع مثلث اب ج کے حائطہ دائرہ کا قطر ہے، ثابت کرو کہ مثلثات ا ج د اور ا ع ب باہم متشابه ہیں اور اس سے اخذ کرو کہ $ا ب \times ا ج = ا د \times ا ع$

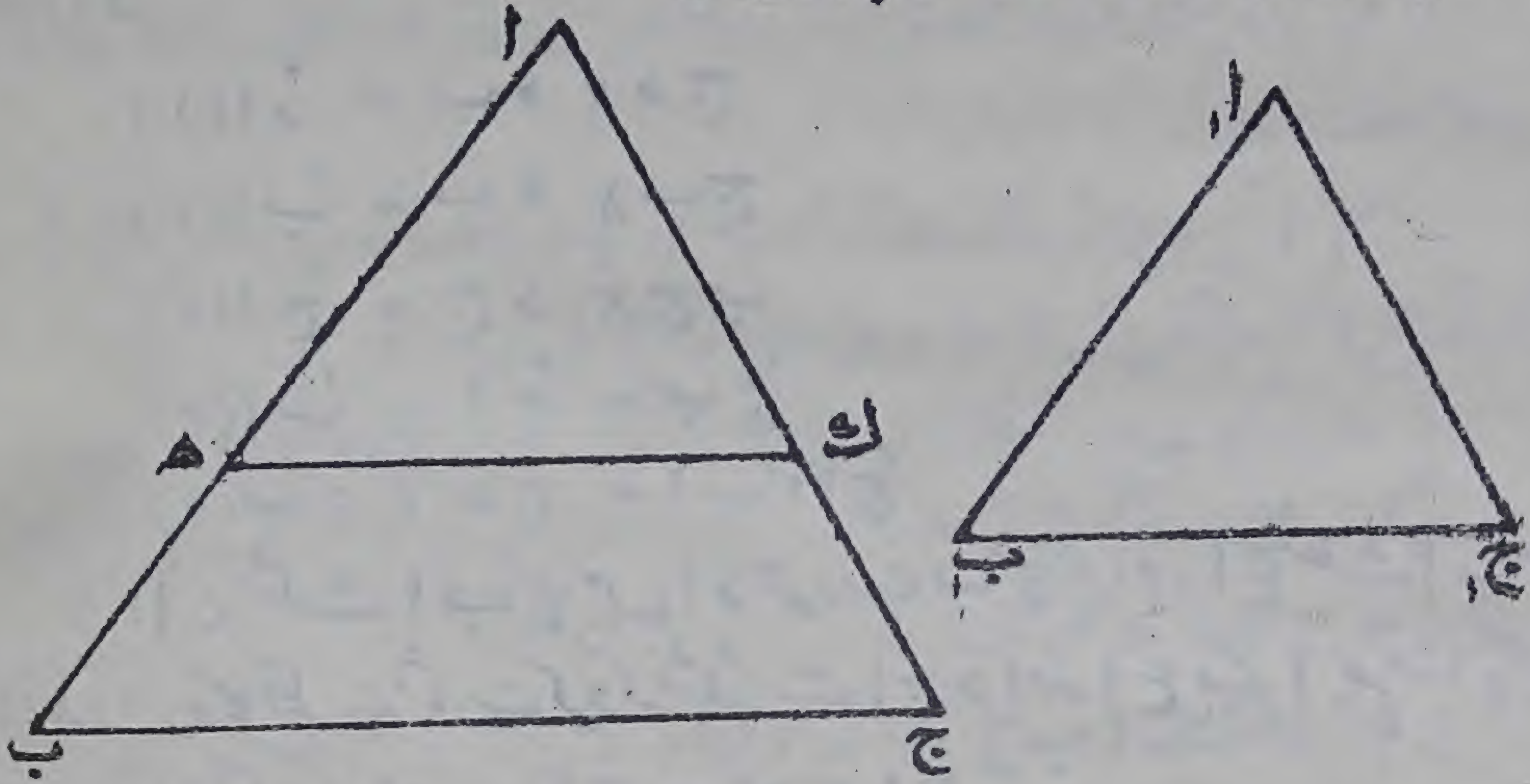
(۱۲) مثلث اب ج کے زاویہ اکا اندرونی نصف ضلع ب ج سے لا پر اور مثلث اب ج کے حائطہ دائرہ سے ملتا ہے، ثابت کرو کہ مثلثات ا ج لا اور ا ما ب باہم متشابه ہیں اور اس سے اخذ کرو کہ $ا ب \times ا ج = ا لا \times ا ما$
(۱۳) ایک شخص جس کا قد ۶ فٹ ہے ایک روشنی کے کھمبے سے ۳۲ فٹ کے

فاصلہ پر کھڑا ہے اور اس کے سایہ کا طول ۸ فٹ ہے۔ بتاؤ کہ روشنی زمین سے کتنی بلندی پر ہے۔ [جواب ۳۱ فٹ]

(۱۴) ایک شخص ایک نہر کی چوڑائی معلوم کرنا چاہتا ہے۔ اس نے نہر کے ایک کنارہ پر $\frac{1}{4}$ فٹ اونچی سلاح نصب کی۔ پھر وہ اس کنارہ سے عموداً ۲۰ فٹ پیچھے ہٹا تو سلاح کی چوٹی اور مقابل کا کنارہ ایک سیدھ میں دکھائی دیے۔ اگر اس شخص کی آنکھ کی اونچائی ۵ فٹ ۸ انچ ہو تو نہر کی چوڑائی معلوم کرو۔ [جواب - ۶۰ فٹ]

(۱۵) دو انتصابی کھمبے ۱۵ فٹ اور ۱۲ فٹ اونچے ہیں۔ ہر ایک کی چوٹی کو دوسرے کھمبے کے قدم سے رسیوں کے ذریعہ ملا لیا گیا ہے۔ رسیوں کے نقطہ تقاطع کی بلندی سطح زمین سے معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ بلندی کھمبوں کے درمیانی فاصلہ پر منحصر نہیں ہے۔ [جواب $\frac{1}{2}$ فٹ]

۲۶۔ مسئلہ - اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو اور ان مساوی زاویوں کے گرد کے اضلاع متناسب ہوں تو مثلثات متشابه ہوں گے۔



مثلثات $\triangle ABC$ اور $\triangle A'B'C'$ میں $\angle A = \angle A'$ اور

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \quad \text{ثابت کرنا ہے کہ یہ مثلثات متشابه ہیں۔}$$

$\triangle ABC$ پر نقطہ H ایسا لو کہ $AH = A'B'$ اور AJ پر نقطہ K ایسا لو کہ

اک = ا ج ا -

ہک کو ملاؤ -

مثلثات اہک، ا ب ج ا میں

$$\hat{ا} = \hat{ا} \\ \hat{ا} = \hat{ا} \\ \hat{ا} = \hat{ا}$$

اور اک = ا ج ا

: ہ ا ہک = ہ ا ب ج ا

$$\text{حسب مفروض} \quad \frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج} \\ \text{اس لیے} \quad \frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج} \quad \text{حسب عمل}$$

اس لیے ہک متوازی ہے ب ج کے

اس لیے ا ب ج = ا ہک = ا ب ج

اور ا ج ب = اک ہ = ا ج ب

اس لیے مثلثات ا ب ج اور ا ب ج متساوی الزوایا میں ہیں لہذا
تشابہ ہیں یہی ثابت کرنا تھا۔

مسئلہ ۴

(۱) مثلث ا ب ج میں کوئی خط مستقیم قاعدہ کے متوازی ہے اور
باقی اضلاع سے لا اور ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اسے گزرنے والا وسطانیہ
خط لا ما کی منصف کرتا ہے۔

(۲) مثلثات ا ب ج اور ا ب ج تشابہ میں۔ ثابت کرو کہ
ان کے حائط دائروں کے نصف قطروں کی نسبت نظیر کے اضلاع کی نسبت
کے مساوی ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ متشابہ مثلثات میں نظیر کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر نکالے ہوئے عمودوں کی نسبت نظیر کے ضلعوں کی نسبت کے مساوی ہے۔
 (۴) ثابت کرو کہ متشابہ مثلثات کے اندرونی دائروں کے نصف قطروں کی نسبت نظیر کے ضلعوں کی نسبت کے مساوی ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والے دائرہ کا قطر مثلث کے حاطہ دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے۔

(۶) مثلث ABC مساوی الاضلاع ہے۔ ہر ضلع کا طول 1 ہے۔
 ضلع BC کو دو دونوں جانب خارج کر کے اس پر دو نقطے N اور Q ایسے لیے گئے ہیں کہ $BN = CQ = 1$ اور AN اور AQ کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$(1) \quad NQ : CQ = AN : AB$$

$$(2) \quad NQ = \frac{1}{3}$$

(۷) دو دائرے جن کے نصف قطر 1 اور 2 ہیں ایک دوسرے کو نقطہ A پر خارجاً مس کرتے ہیں۔ اور ان دائروں کا ایک مشترک مماس AN کو Q اور Q پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ AF اور Q قائمہ ہے اور $FQ = \frac{1}{2}$ ۔

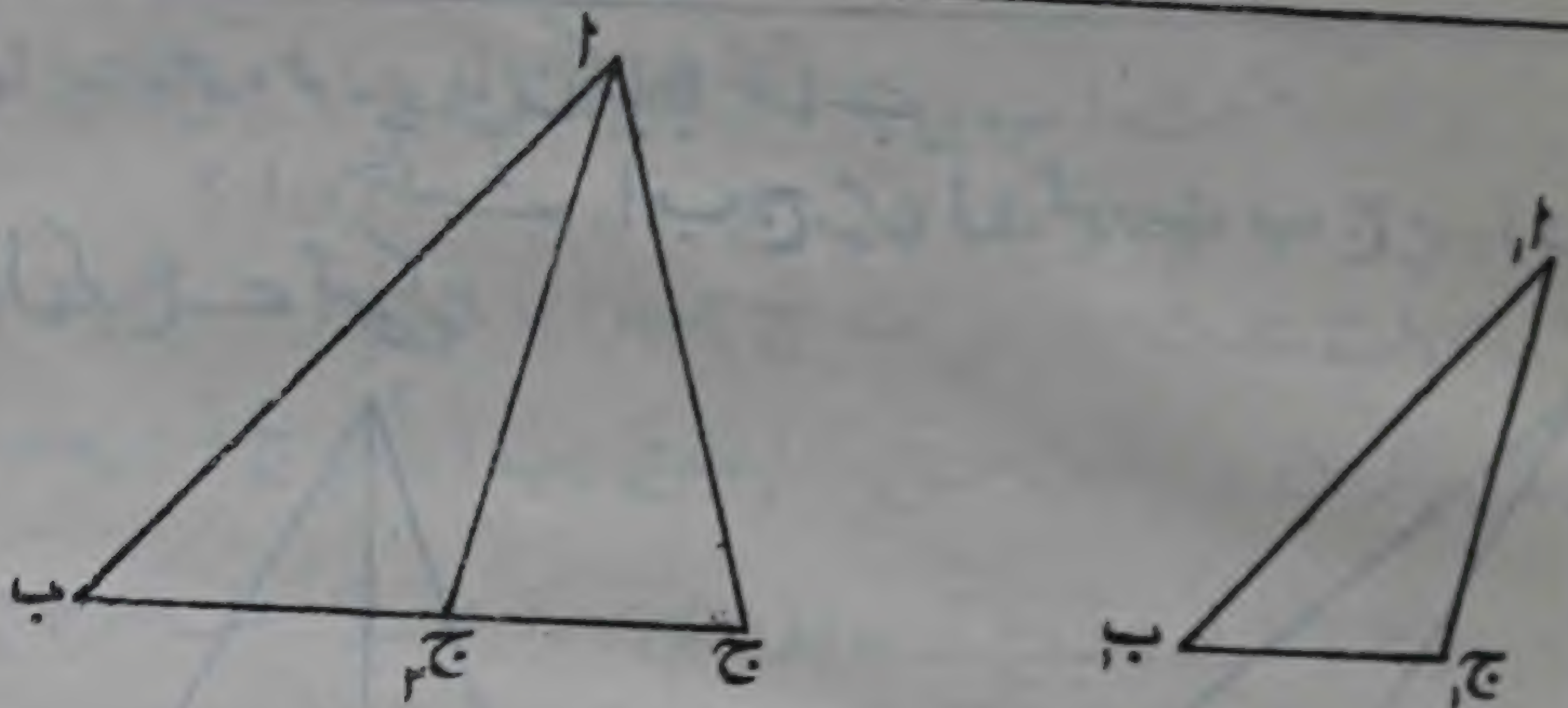
(۸) دو دائرے ایک دوسرے کو A پر خارجاً مس کرتے ہیں اور ان کا ایک مشترک مماس AF مرکزوں کے خط سے S پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ (۱) مثلثات S اور S متشابہ ہیں۔

$$(2) \quad SF : AF = SQ : AS$$

$$(9) \quad \text{مثلثات } ABC \text{ اور } A'B'C' \text{ میں } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

اور $\hat{B} = \hat{B}'$ ، اگرچہ $\hat{C} \neq \hat{C}'$ تو ثابت کرو کہ

$$\hat{C} + \hat{C}' = 180^\circ$$

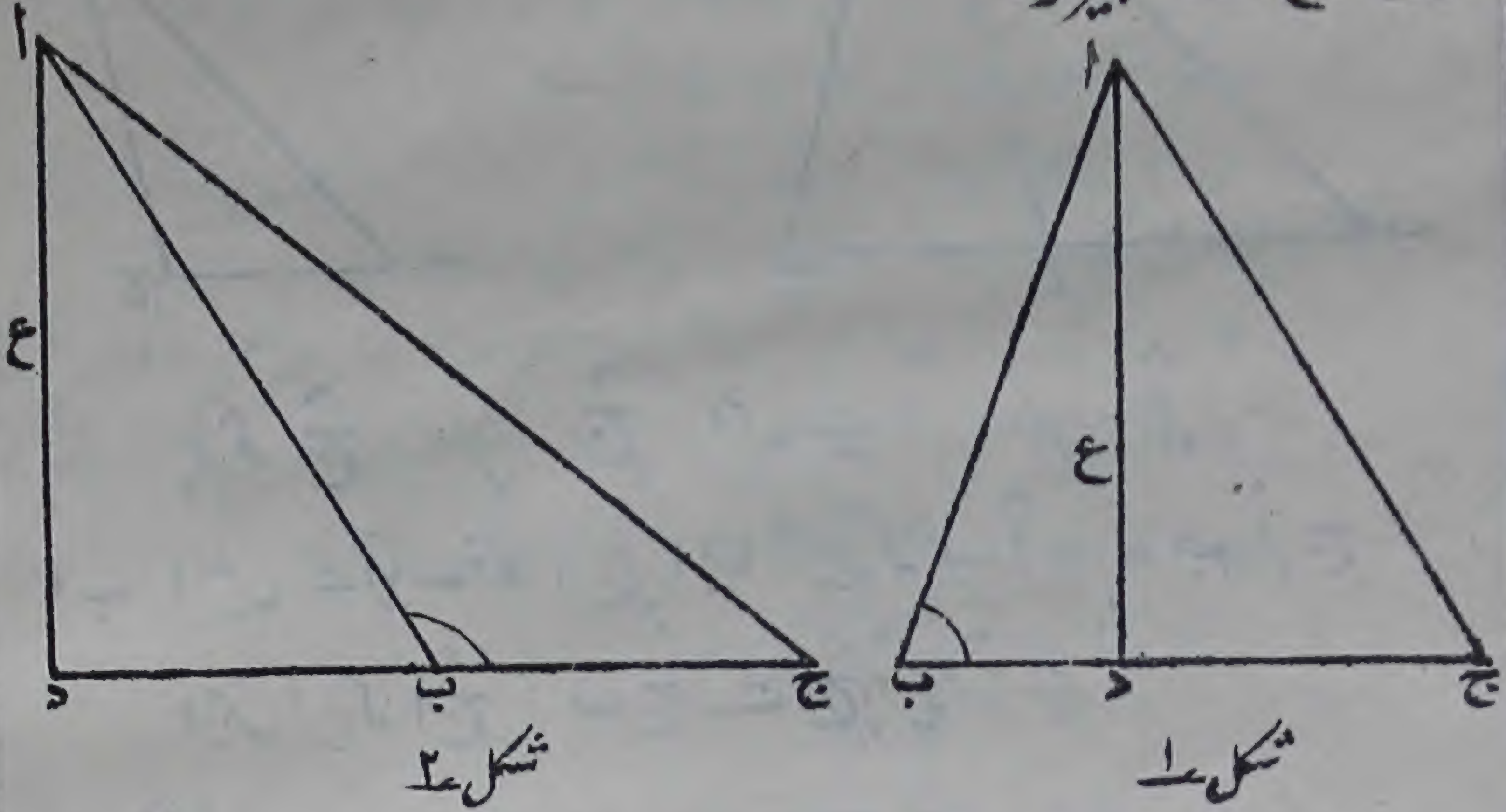


چونکہ $\hat{C} = \hat{C}$ اس لیے $\hat{A} \neq \hat{A}$
 اب \hat{A} میں سے ایک خط DE ایسا کھینچو کہ $\hat{B} = \hat{B}$ اور $\hat{C} = \hat{C}$
 فرض کرو کہ DE ، BC سے جڑ پر ملتا ہے۔
 اب مثلثات ABC اور ADE جڑ متشابه ہیں۔

اس لیے $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$
 لیکن دیا گیا ہے کہ $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$
 یعنی $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$ یعنی $AE = AD$
 اس لیے $\hat{A} = \hat{A}$
 اس لیے $\hat{B} + \hat{A} = \hat{B} + \hat{A}$ قائمہ زاویے۔
 لیکن $\hat{B} = \hat{B}$
 اس لیے $\hat{B} + \hat{A} = \hat{B} + \hat{A}$ قائمہ زاویے۔

۲۷۔ بعض ہندسی نتائج کو مثلثی نسبتوں کے استعمال سے

نہایت عمدہ طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔
(۱) مثلث ABC میں AD عمود ہے B پر۔ AD کے
طول کو E سے تعبیر کرو



تب $E = BC$ جب $AD = D$
شکل ۱ میں $AD = D$ جب $AD = D$ اور شکل ۲ میں
 $AD = D = 180^\circ - B$

اس لیے دونوں صورتوں میں جب $AD = D = BC$
 $E = BC$ جب B
اسی طرح سے $E = BC$ جب B

$$\frac{E}{BC} = \frac{BC}{BC}$$

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ $\frac{E}{BC} = \frac{BC}{BC}$

$$\frac{E}{BC} = \frac{BC}{BC} = \frac{1}{1}$$

یعنی کسی مثلث کے اضلاع مقابل کے زاویوں کی جیوب کے متناسب ہوتے ہیں۔

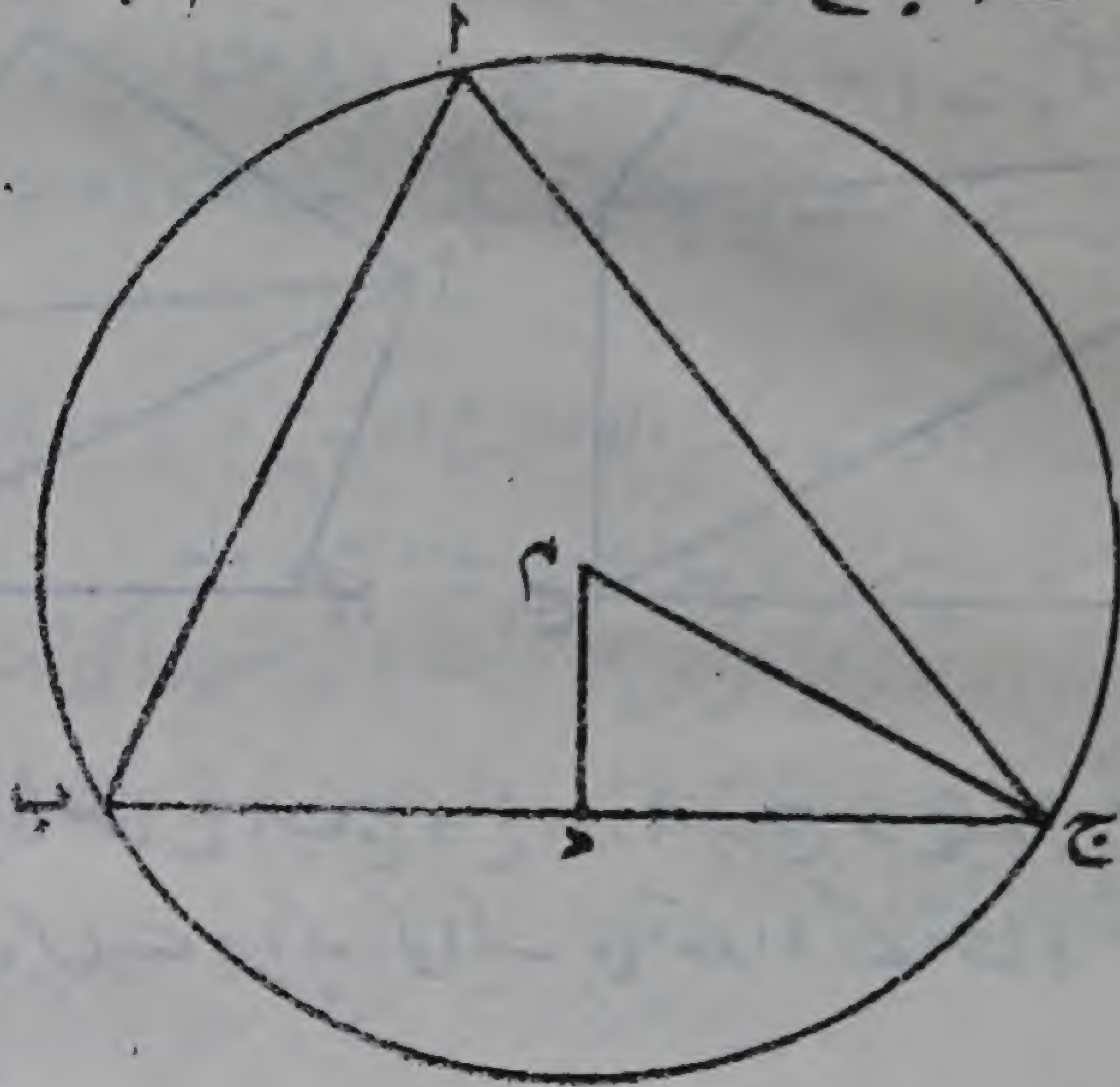
(۲) مثلث ABC کا رقبہ $\Delta = \frac{1}{2} AC$ (دیکھو شکل بالا)

$$\frac{1}{2} AB \text{ جب } C =$$

اسی طرح سے $\Delta = \frac{1}{2} BC \text{ جب } A = \frac{1}{2} AC \text{ جب } B =$

پس حاصل ہوا کہ $\Delta = \frac{1}{2} AB \text{ جب } C = \frac{1}{2} BC \text{ جب } A = \frac{1}{2} AC \text{ جب } B =$

(۳) مثلث ABC کے حائط دائرہ کا مرکز M ہے، نصف قطر MD BC کو



س سے تعبیر کرو۔ فرض کرو کہ B BC کا وسطی نقطہ دے تب ہم D BC قائمہ
اور $MD = \frac{1}{2} BC$

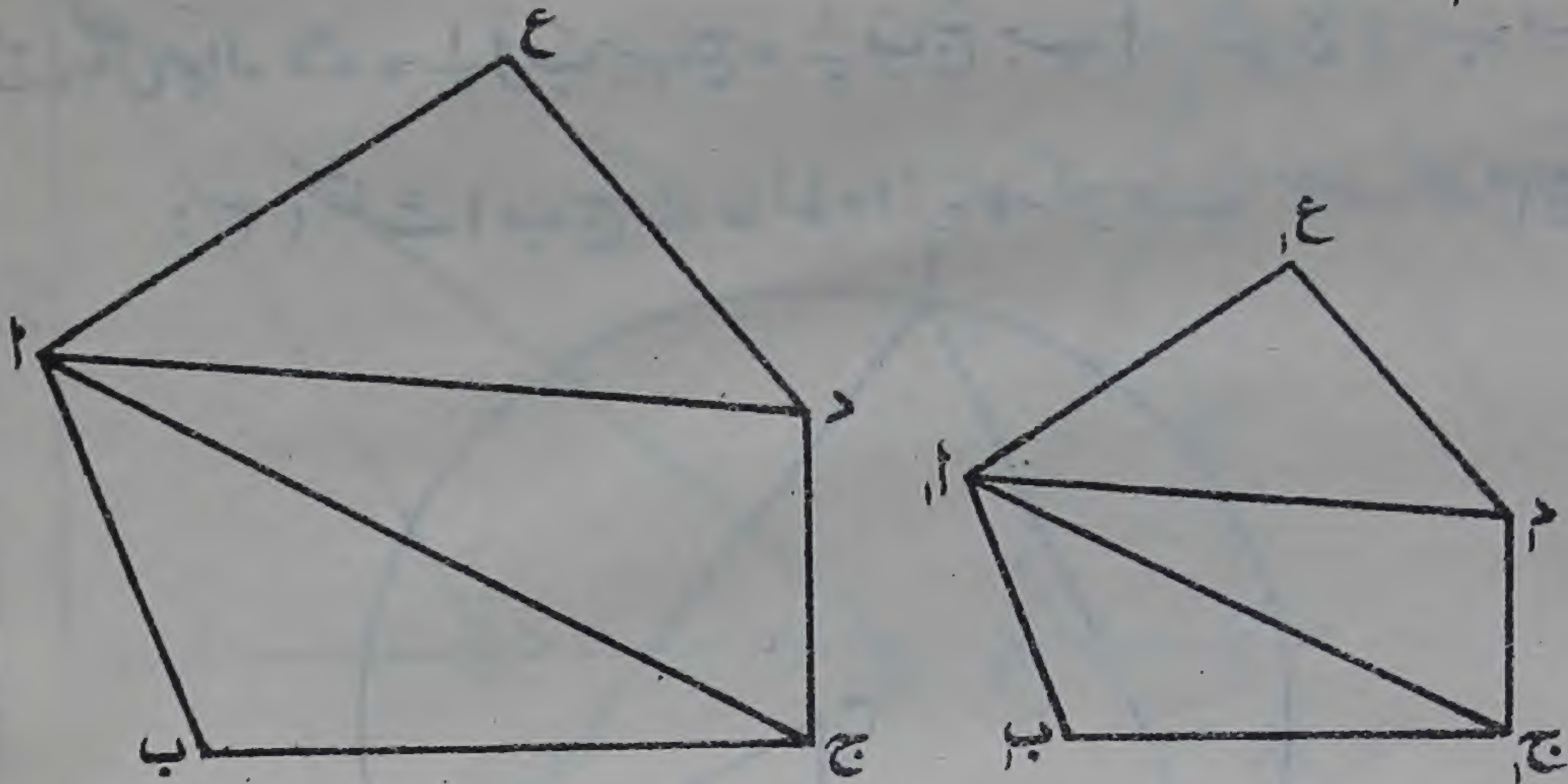
$$\text{اس لیے } \frac{MD}{BC} = \text{جب } A$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{2} = \frac{MD}{BC} \text{ جب } A$$

$$\therefore \frac{AB}{\Delta} = \frac{AB \text{ جب } C}{\Delta} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ جب } A$$

نوٹ: شکل بالا میں مثلث ABC کے تمام زاویے ماوہ لیے گئے ہیں۔

کسی ایک زاویہ کے منفرجہ یا قائمہ ہونے کی صورت میں طالب علم خود اس نتیجہ کو حاصل کرے۔
۲۸۔ مسئلہ۔ دو متشابه کثیر الاضلاع متشابه مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیے جاسکتے ہیں۔



کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا ب ج د ع باہم متشابه ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ ان میں سے ہر ایک کو ایک ہی تعداد کے متشابه مثلثوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

ا ج، ا د، ا ج، ا د کو ملاؤ۔
 چونکہ کثیر الاضلاع متشابه ہیں

اس لیے $\frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ب ج}{ب ا}$ اور $\frac{ب ج}{ب ا} = \frac{ب ج}{ب ا}$
 اس لیے مثلثات ا ب ج اور ا ب ج متشابه ہیں۔

اس لیے ب ج ا = ب ج ا

اور $\frac{ج ا}{ا ج} = \frac{ب ج}{ب ا}$

(کیونکہ کثیر الاضلاع متشابه ہیں) $\frac{ج د}{ج ا} = \frac{ج د}{ج ا}$

نیز چونکہ $\hat{ب} \hat{ج} د = \hat{ب} \hat{ج} د$
 اس لیے $\hat{ا} \hat{ج} د = \hat{ا} \hat{ج} د$
 اب مثلثات $\hat{ا} \hat{ج} د$ اور $\hat{ا} \hat{ج} د$ میں
 $\hat{ا} \hat{ج} د = \hat{ا} \hat{ج} د$
 اور $\frac{\hat{ا} \hat{ج}}{\hat{ا} \hat{ج}} = \frac{\hat{ج} د}{\hat{ج} د}$

اس لیے مثلثات $\hat{ا} \hat{ج} د$ اور $\hat{ا} \hat{ج} د$ باہم متشابه ہیں۔
 اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ مثلثات $\hat{ا} د ع$ اور $\hat{ا} د ع$

بھی متشابه ہیں۔
 پس ثابت ہوا کہ متشابه کثیر الاضلاع $\hat{ا} \hat{ب} \hat{ج} د ع$ اور $\hat{ا} \hat{ب} \hat{ج} د ع$ کو
 ایک ہی تعداد کے متشابه مثلثوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔
 نوٹ (۱)۔ اوپر کی شکل میں کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد پانچ ہے
 اُس صورت میں جب کہ کثیر الاضلاع میں ضلعوں کی تعداد پانچ سے زیادہ ہو اسی قسم کے
 استدلال سے مسئلہ بالاثبات ہو سکتا ہے۔

نوٹ (۲)۔ اس ثبوت میں ضمنی طور پر یہ بھی ثابت ہو گیا ہے کہ

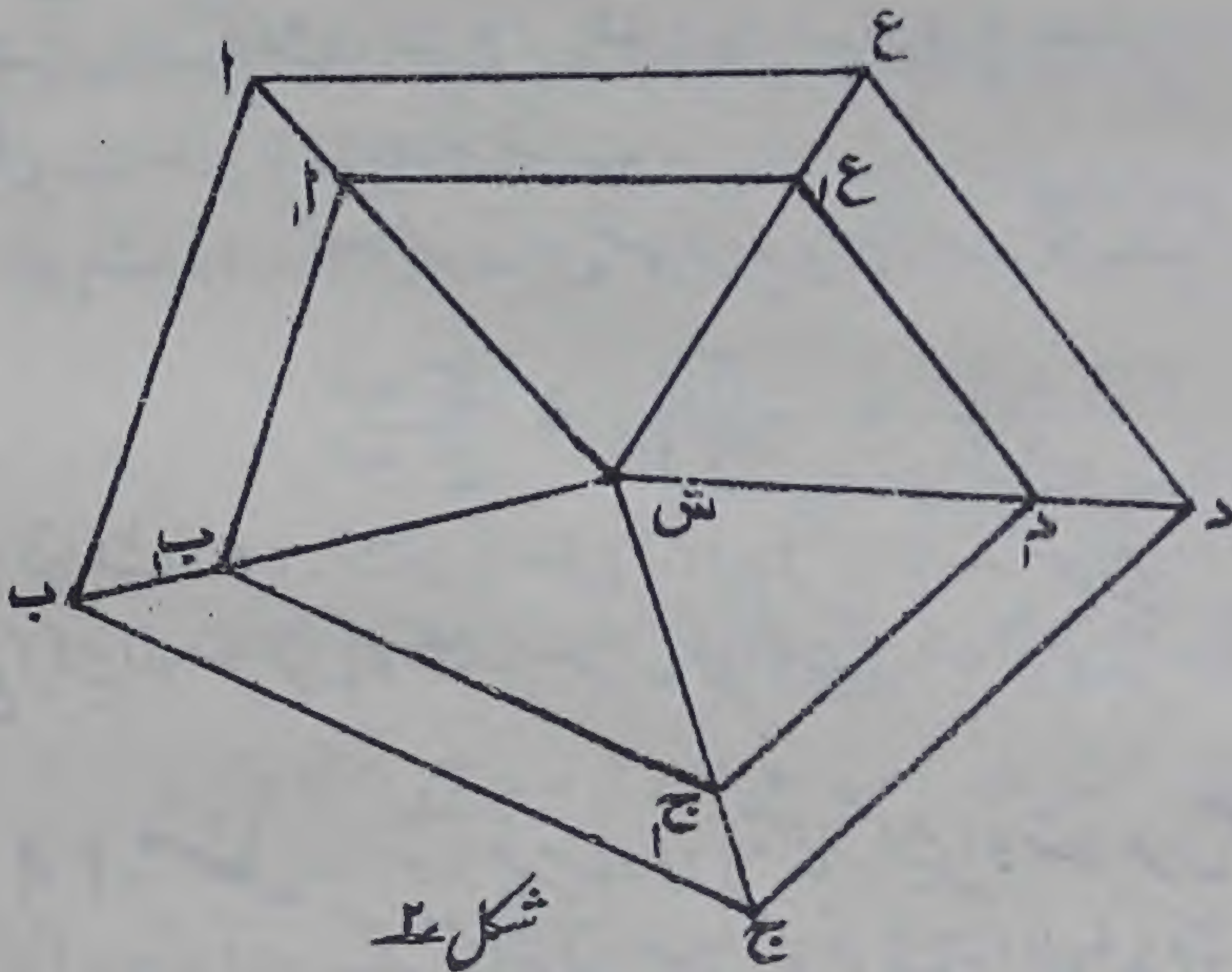
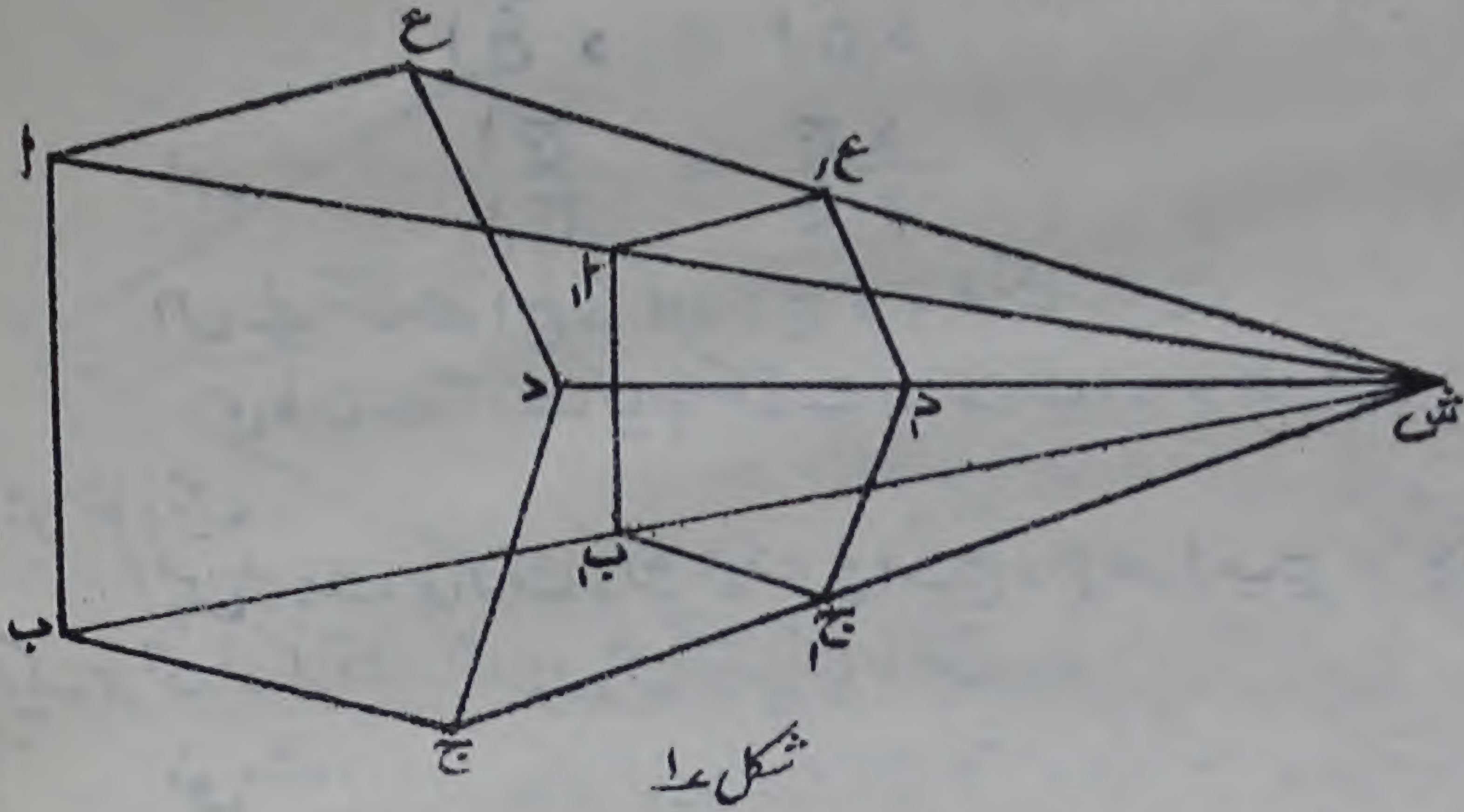
$$\frac{\hat{ب} \hat{ج}}{\hat{ب} \hat{ا}} = \frac{\hat{ا} \hat{ج}}{\hat{ا} د} = \frac{\hat{ا} د}{\hat{ا} د}$$

نوٹ (۳)۔ متناظر اُسوں $\hat{ا}$ اور $\hat{ا}$ کی بجائے کسی اور دو متناظر اُسوں
 خطوط کھینچ کر کثیر الاضلاعوں کو متشابه مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیا جاسکتا
 ہے۔

۲۹ مسئلہ۔ دو (غیر مساوی) متشابه کثیر الاضلاعوں کو اس طرح
 رکھا جاسکتا ہے کہ اُن کے متناظر اُسوں کو ملائے والے خط ایک ہی نقطہ
 میں سے گزریں۔

دو غیر مساوی متشابه کثیر الاضلاع $\hat{ا} \hat{ب} \hat{ج} د ع$ اور $\hat{ا} \hat{ب} \hat{ج} د ع$ کو
 اس طرح رکھا گیا ہے کہ نظیر کے ضلع $\hat{ا} \hat{ب}$ ، $\hat{ا} \hat{ب}$ ایک دوسرے کے

متوازی ہیں۔ (ظاہر ہے کہ نظیر کے ضلعوں کے دوسرے جوڑے بھی متوازی ہونگے)۔ ثابت کرنا ہے کہ خطوط aa' ، bb' ، cc' ، dd' ، ee' ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔



فرض کرو کہ aa' ، bb' کا نقطہ تقاطع $ش$ ہے $ش$ ج اور $ش$ ج کو ملاؤ۔
 مثلثات $ش$ ab ، $ش$ $a'b'$ متشابه ہیں

$$\therefore \frac{ش\ b}{ش\ b'} = \frac{ab}{a'b'}$$

$$\text{لیکن } \frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ب ج}{ب ج}$$

اب مثلثات ش ب ج اور ش ب ج میں
ش ب ج = ش ب ج (کیونکہ ب ج // ب ج)

$$\text{اور } \frac{ش ب}{ش ب} = \frac{ب ج}{ب ج}$$

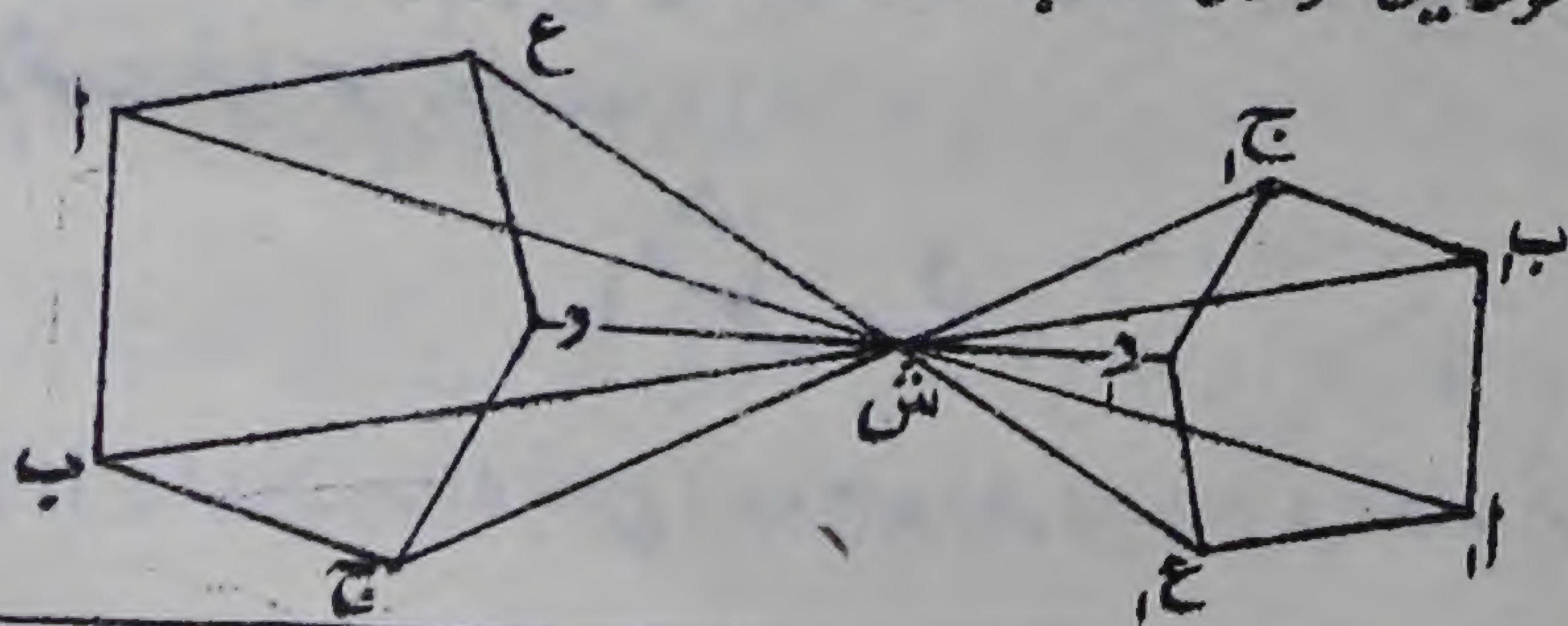
اس لیے مثلثات ش ب ج اور ش ب ج متشابه ہیں۔

اس لیے ب ش ج = ب ش ج
اس لیے خطوط ش ج اور ش ج ایک دوسرے پر منطبق ہیں۔
یعنی متناظر راسوں ج ج کو ملانے والا خط نقطہ ش میں سے گزرتا ہے
اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ خطوط د د اور ع ع بھی نقطہ ش میں
سے گزرتے ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ متناظر راسوں کو ملانے والے خط ایک ہی
نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

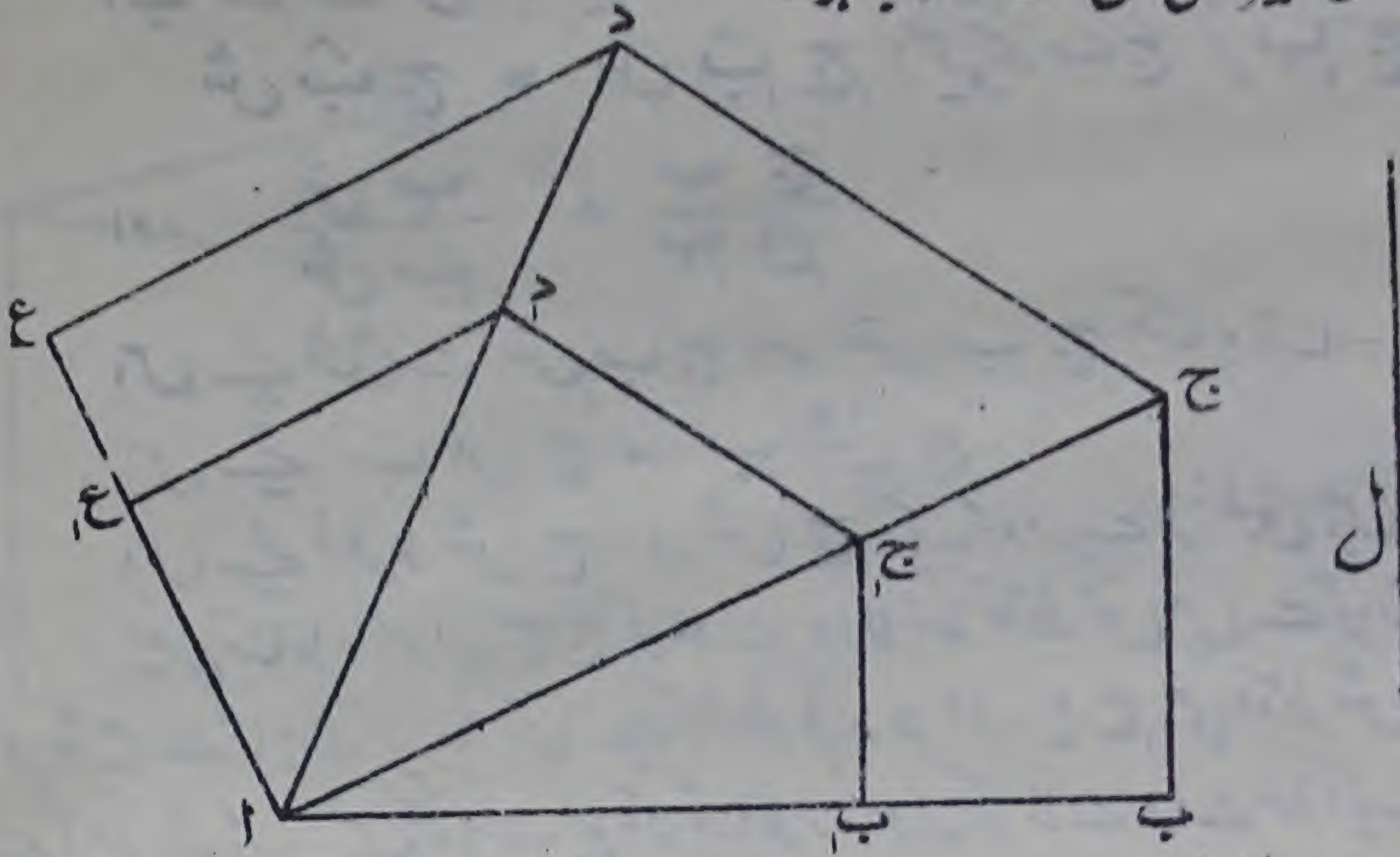
نقطہ (۱)۔ اگر دو متشابه کثیر الاضلاع اس طرح رکھے جائیں کہ نظیر کے ضلع متوازی ہوں تو
یہ ہم وضع شکلیں کہلاتی ہیں اور ان کے نظیر کے نقطوں کو ملانے والے خطوط کا نقطہ تراکزش
ان ہم وضع متشابه اشکال کا مشابہت کا مرکز کہلاتا ہے۔

نقطہ (۲)۔ اگر متشابه کثیر الاضلاعوں کو ہم وضع طور پر ایک دوسرے کے اندر
رکھا جائے تو مشابہت کا مرکز دونوں شکلوں کے اندر ہوگا۔

نقطہ (۳)۔ دفعہ ہذا کے مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے جو شکلیں کھینچی گئی ہیں ان میں نظیر کے
اضلاع اب، اب، اب ایک ہی سمت میں متوازی رکھے گئے ہیں۔ اگر نظیر کے اضلاع اب، اب، اب
کو مخالف سمتوں میں متوازی رکھا جائے تو متعلقہ شکل حسب ذیل ہوگی۔



اس صورت میں نظیر کے رأسوں کو ملانے والے خط ایک ہی نقطہ میں سے گزریں گے۔
 ۳۰۔ مسئلہ عملی - ایک دیے ہوئے ضلع پر ایک کثیر ضلعی شکل کھینچنا جو ایک
 دی ہوئی کثیر ضلعی شکل کے متشابه ہو۔



فرض کرو کہ اب ج د ع ایک دی ہوئی شکل ہے اور ل دیے ہوئے ضلع
 کا طول ہے ایک شکل بنانا ہے جو دی ہوئی شکل اب ج د ع کے متشابه ہو اور جس میں
 اب کے نظیر کے ضلع کا طول ل ہو۔ اج، اد کو ملاؤ۔

اب (ممدودہ بشرط ضرورت) پر ایک نقطہ ب ایسا لو کہ اب = ل
 ب ج متوازی کھینچو ب ج کے جو ا ج سے ج پر ملے۔

اور ج د متوازی کھینچو ج د کے جو ا د سے د پر ملے۔

اور د ع متوازی کھینچو د ع کے جو ا ع سے ع پر ملے۔

تب اب ج د ع مطلوبہ شکل ہوگی۔

ثبوت متشابه مثلثوں کی مدد سے باسانی دیا جاسکتا ہے مشق کے طور پر
 طالب علم ثبوت خود بہم پہنچائے۔

امثلہ ۵

(۱) ذواربعتہ الاضلاع اب ج د اور اب ج د متشابه ہونگے اگر

$$(۱) \hat{A} = \hat{A} \text{ اور } \frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{A}$$

$$(۲) \hat{A} = \hat{A}, \hat{B} = \hat{B} \text{ اور } \frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{A}$$

(۲) ذواربعتہ الاضلاع اب ج د کے متشابہ ایک شکل بناؤ جس کے ہر ضلع کو اپنے نظیر کے ضلع کے ساتھ نسبت ۳ : ۴ ہو۔

(۳) ایک دیے ہوئے خط اب پر ایک نصف دائرہ بناؤ۔ اس نصف دائرہ کے اندر ایک مربع بناؤ جس کے دو راس قوس پر ہوں اور دو قطر پر۔ اگر اب کا طول ۲ ہو تو مربع کا ضلع معلوم کرو۔ (جواب $\frac{2}{5}$)

(۴) ۴ و ۳ نصف قطر کا ایک قطاع دائرہ بناؤ جس کا مرکزی زاویہ ۶۰ ہو۔ اس کے اندر ایک مربع بناؤ اور مربع کے ضلع کا طول نا پو اور حساب لگانے سے اپنے جواب کو جانچو۔ [جواب ۲ اور ۱ (۶۶-۶۷) انج]

(۵) ایک منتظم سدس اب ج د ع ف بناؤ جس کے ہر ضلع کا طول ۲ و ۱ ہو اور اس کے راس باقی اضلاع پر ہوں۔

(۶) ایک دیے ہوئے مثلث کے اندر ایک ایسا مثلث بناؤ جو ایک اور دیے ہوئے مثلث کے متشابہ ہو۔

(۷) ایک دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے متشابہ ایک ایسا کثیر الاضلاع بناؤ جس کا محیط دیا گیا ہے۔

(۸) کثیر الاضلاع اب ج د ع کی سطح میں کوئی نقطہ و ہے۔ و ا و ب و ج و د و ع کو بالترتیب نقاط ا ب ج د ع پر ایک ہی معلومہ نسبت میں تقسیم کیا گیا ہے ثابت کرو کہ کثیر الاضلاع اب ج د ع دیے ہوئے کثیر الاضلاع اب ج د ع کے متشابہ ہے۔

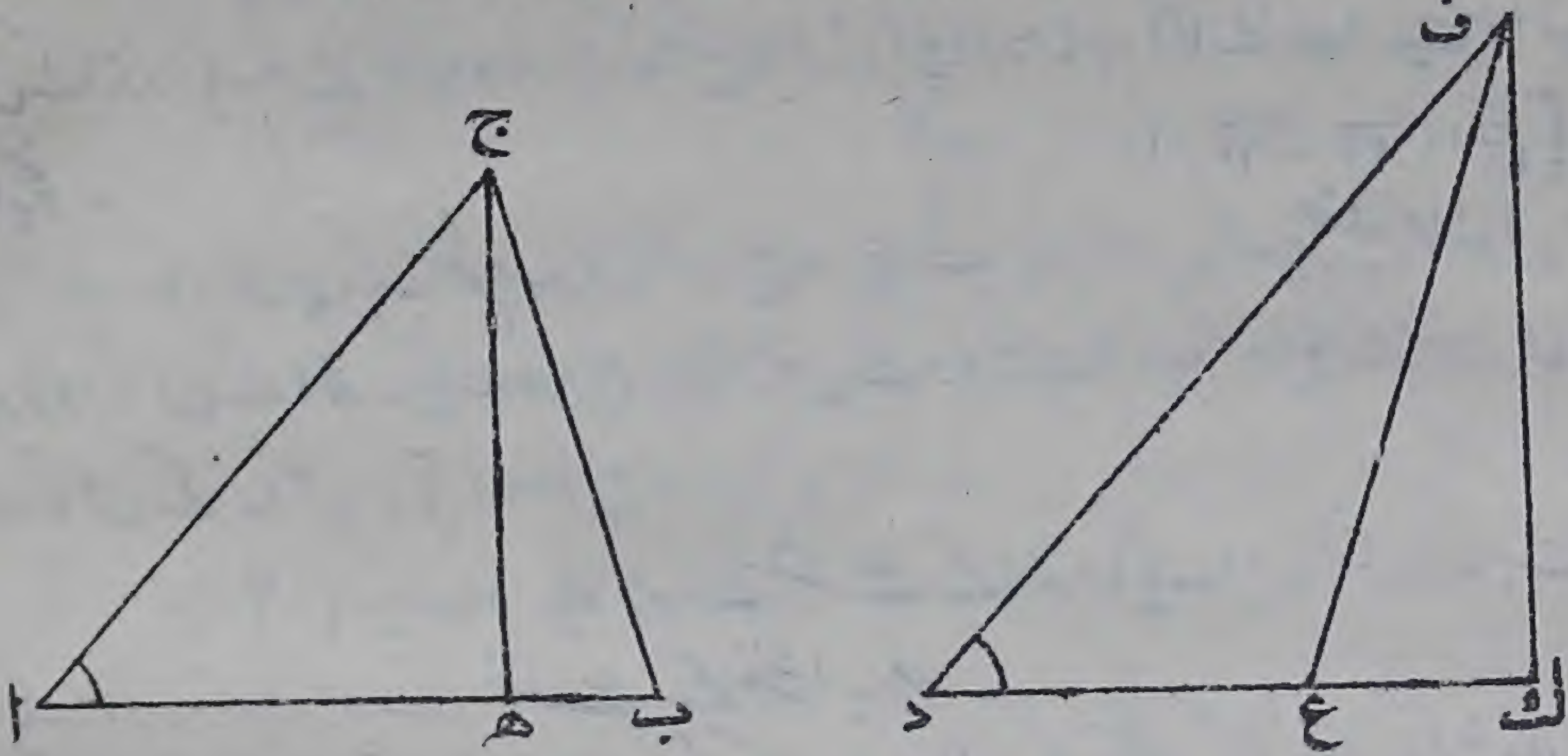
(۹) کثیر الاضلاع اب ج د ع کی سطح میں کوئی نقطہ ہے اور و ا و ب و ج و د و ع کو بالترتیب ا ب ج د ع پر ایک ہی معلومہ نسبت میں تقسیم کیا گیا ہے۔

متوازی کھینچے گئے ہیں جو ب، و ج، و د و ع سے بالترتیب ب، ج، د، ع، پر ملتے ہیں۔ ا، ع کو ملا یا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کثیر الاضلاع ا، ب، ج، د، ع کثیر الاضلاع ا، ب، ج، د، ع کے متشابه ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ مخروط مضلع کی کوئی مستوی تراش جو قاعدہ کے متوازی ہو قاعدہ کے متشابه ہوتی ہے۔

(۱۱) متشابه مشترک المہیط شکلوں کے حاطط دائروں کے قطر نظیر کے ضلعوں کی نسبت میں ہوتے ہیں۔

۳۱۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو تو ان مثلثوں کے رفقی مساوی زاویوں کے گرد کے ضلعوں کے حاصل ضربوں کے تناسب ہونگے۔



مثلث ا، ب، ج کا زاویہ ا مثلث د، ع، ف کے زاویہ د کے مساوی ہے۔

$$\frac{AB \times AC}{DE \times DF} = \frac{AB \times AC}{DE \times DF}$$

ج سے ا، ب پر عمود ج، ہ اور ف سے د، ع پر عمود ف، ک نکالو
مثلثات ج، ا، ہ، ف، د، ک متشابه ہیں۔

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\Delta \text{ ا ب ج } = \frac{1}{2} \text{ ا ب } \times \text{ ج ہ}$$

$$\Delta \text{ د ع ف } = \frac{1}{2} \text{ د ع } \times \text{ ف ک}$$

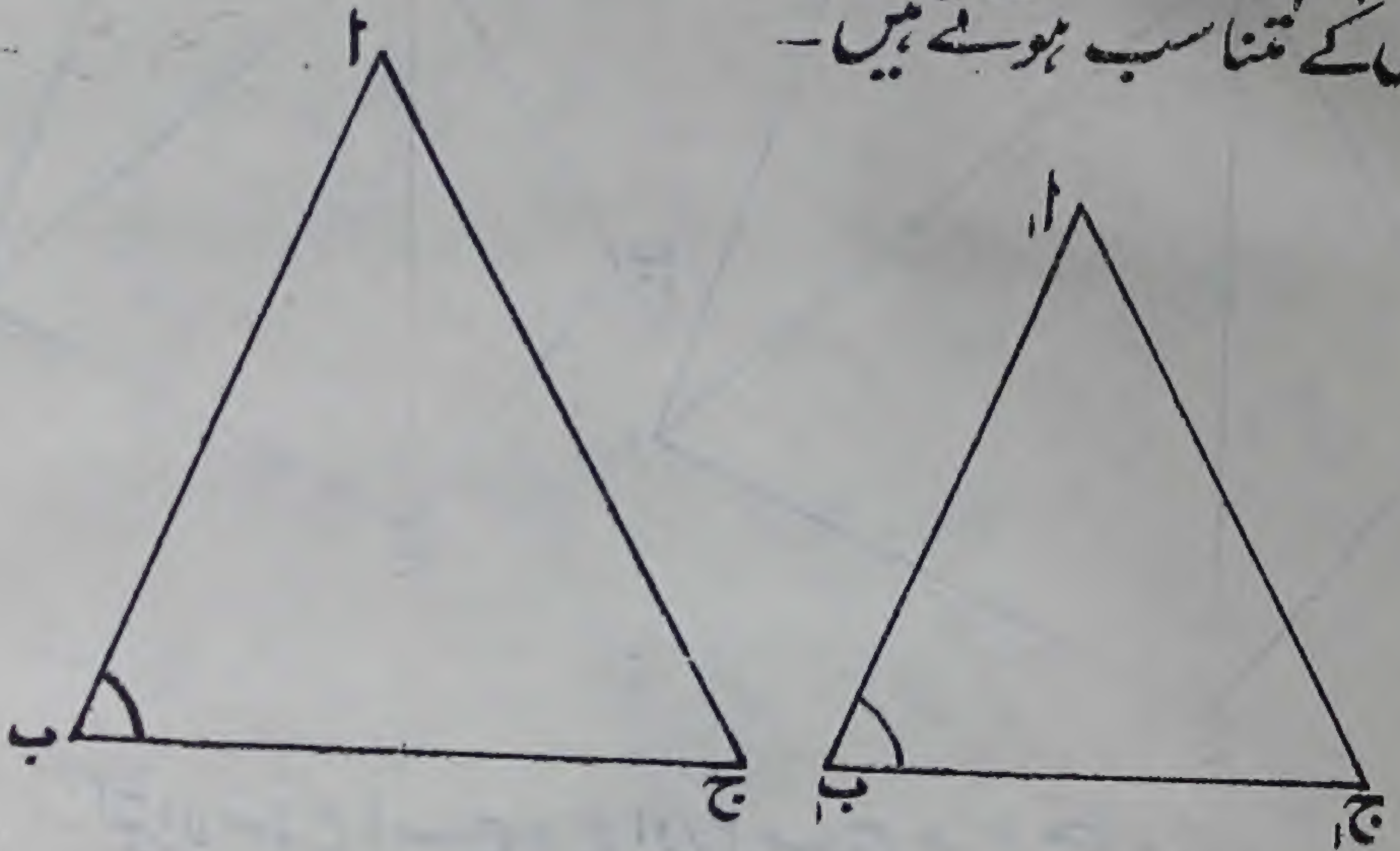
اور

$$\therefore \frac{\Delta \text{ ا ب ج}}{\Delta \text{ د ع ف}} = \frac{\text{ا ب } \times \text{ ج ہ}}{\text{د ع } \times \text{ ف ک}} = \frac{\text{ا ب } \times \text{ ج ہ}}{\text{د ع } \times \text{ ف ک}} \quad [\text{کیونکہ } \frac{\text{ا ج}}{\text{د ف}} = \frac{\text{ا ج}}{\text{د ف}}]$$

نوٹ۔ اس مسئلہ کا متبادل ثبوت دفعہ ۲ مثال ۲ کے نتیجہ کی مدد سے حاصل کرو۔

نتیجہ صریح۔ اگر ایک متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ دوسرے متوازی الاضلاع کے ایک زاویہ کے مساوی ہو تو ان کے رقبے مساوی زاویوں کے گرد کے ضلعوں کے حاصل ضربوں کے تناسب ہونگے۔

۳۲۔ مسئلہ۔ متشابہ مثلثوں کے رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے تناسب ہوتے ہیں۔



مثلثات ا ب ج اور ا ب ج متشابہ ہیں۔

$$\text{ثابت کرنا ہے کہ } \frac{\Delta \text{ ا ب ج}}{\Delta \text{ ا ب ج}} = \frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا ب}^2}$$

چونکہ مثلثات ا ب ج اور ا ب ج متشابہ ہیں اس لیے $\angle \text{ب} = \angle \text{ب}$

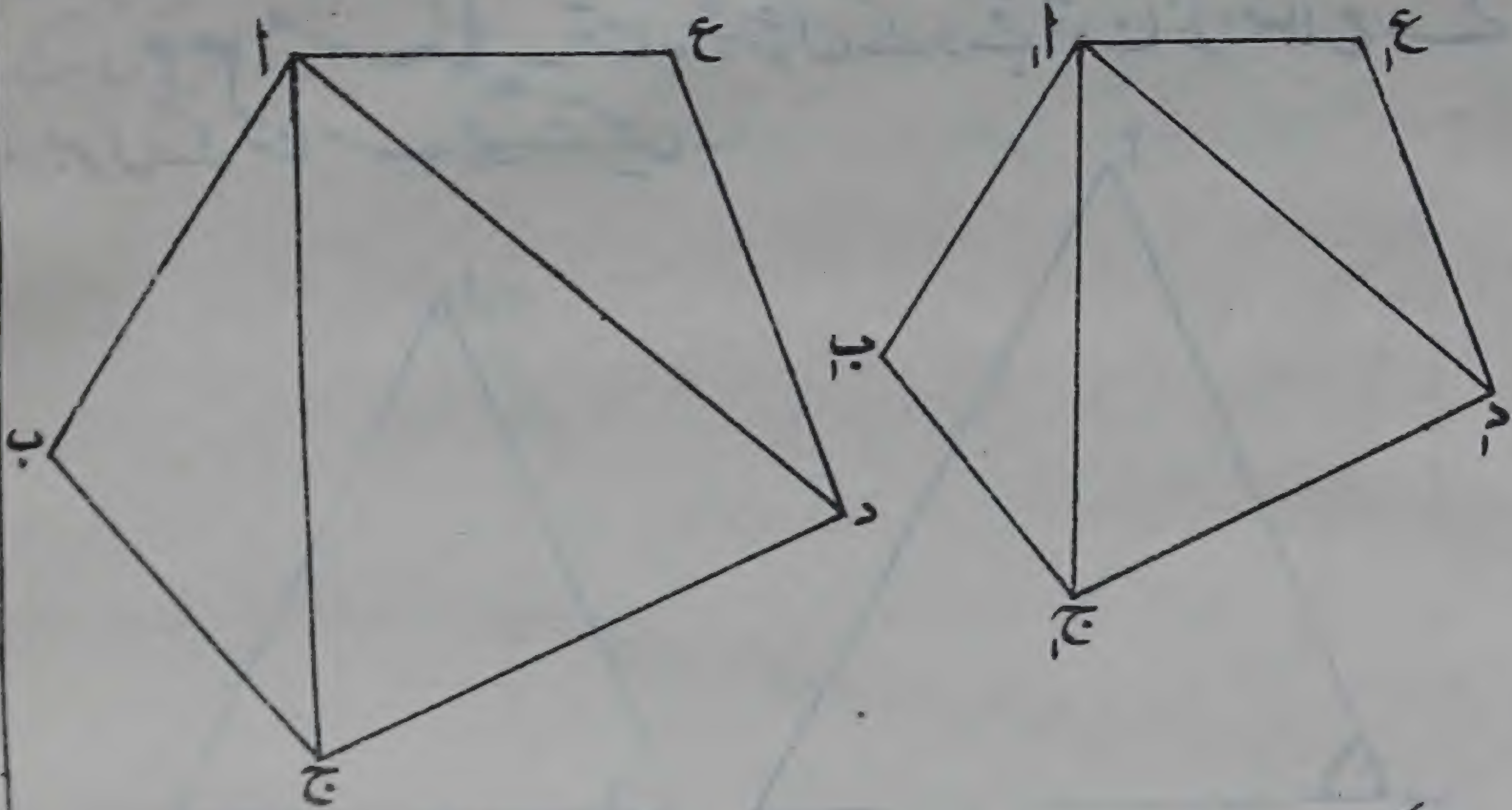
$$\text{اور } \frac{\text{ب ج}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ب}} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\frac{AB \times BC}{AB \times AC} = \frac{\Delta ABC}{\Delta ABC}$$

$$= \frac{AB}{AC} \times \frac{BC}{AB} \text{ بموجب (۱)}$$

$$= \frac{AB^2}{AC^2} \text{ جو ثابت کرنا تھا۔}$$

۳۳۔ مسئلہ۔ متشابه کثیرالاضلاعوں کے رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔



کثیرالاضلاع ABCD اور A'B'C'D' متشابه ہیں

$$\frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{\text{شکل ABCD کا رقبہ}}{\text{شکل A'B'C'D' کا رقبہ}}$$

اج، اد، اور ا'ج، ا'د کو ملاؤ۔

چونکہ مثلثات ABC اور A'B'C' متشابه ہیں

$$\text{اس لیے } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \dots \dots \dots (۱)$$

نیز چونکہ مثلثات ACD اور A'C'D' متشابه ہیں

(۲) اس لیے $\frac{\Delta ا ج د}{\Delta ا ج د} = \frac{ج د}{ج د}$

نیز چونکہ مثلثات ادع اور ا د ج متشابه ہیں

(۳) اس لیے $\frac{\Delta ا د ج}{\Delta ا د ج} = \frac{د ج}{د ج}$

چونکہ کثیر الاضلاع اب ج د ج اور اب ج د ج متشابه ہیں

اس لیے $\frac{اب}{اب} = \frac{ج د}{ج د} = \frac{د ج}{د ج}$

(۴) اس لیے $\frac{اب}{اب} = \frac{ج د}{ج د} = \frac{د ج}{د ج}$

نتائج (۱) (۲) (۳) (۴) کو ملائے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{اب}{اب} = \frac{\Delta ا ب ج}{\Delta ا ب ج} = \frac{\Delta ا ج د}{\Delta ا ج د} = \frac{\Delta ا د ج}{\Delta ا د ج}$$

$$\frac{\Delta ا ب ج + \Delta ا ج د + \Delta ا د ج}{\Delta ا ب ج + \Delta ا ج د + \Delta ا د ج} =$$

$$\frac{\text{شکل اب ج د ج کا رقبہ}}{\text{شکل اب ج د ج کا رقبہ}} = \text{یہی ثابت کرنا تھا۔}$$

مسئلہ ۱

(۱) مثلث اب ج میں اضلاع اب، ا ج کے وسطی نقطے د اور ع ہیں۔

ثابت کرو کہ $\Delta ا د ج$ کا رقبہ منحرف د ب ج ع کے رقبہ کا $\frac{۱}{۴}$ ہے۔

(۲) ایک مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے

اُس کا رقبہ دیے ہوئے مثلث کے رقبہ کا کونسا حصہ ہے؟ (جواب $\frac{۱}{۴}$ حصہ)

(۳) مثلث اب ج میں قاعدہ ب ج کے متوازی خط لا ما اس طرح

کیجیو کہ ۵ الا ما کا رقبہ منحرف لاج کے رقبہ کا $\frac{9}{2}$ ہے۔

[اشارہ - الا : اب = ۳ : ۲]

(۴) مثلث اب ج میں زاویہ ا قائمہ ہے اور ا د عمود ہے ب ج پر۔
ثابت کرو کہ ۵ ب ا د : ۵ ا ج د = اب : اج

(۵) متشابه مشترک المہیط شکلوں کے رقبے ان کے حاطط دائروں کے قطروں کے مربعوں کے تناسب ہوتے ہیں۔

(۶) ایک دائرہ کے اندر بنے ہوئے منتظم مسدس کا رقبہ اس دائرہ کے گرد بنے ہوئے منتظم مسدس کے رقبہ کا $\frac{3}{2}$ ہے۔

(۷) منحرف اب ج د کے اضلاع اب بج د باہم متوازی ہیں۔ اج اور ب د ایک دوسرے کو دو پر قطع کرتے ہیں۔ اگر اب : ج د = ۲ : ۳ تو مثلثات و اب اور ج د کے رقبوں کی نسبت معلوم کرو۔ (جواب $\frac{4}{9}$)

(۸) مثلث اب ج میں ا = ۶۰ اور ب ع اور ج ف، بالترتیب اضلاع اج، اب پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ع ف کا رقبہ مثلث اب ج کے رقبہ کا $\frac{1}{4}$ ہے۔

(۹) ثابت کرو کہ متشابه مثلثوں کے رقبوں میں وہی نسبت ہے جو

(۱) متناظر ارتفاعوں کے مربعوں میں ہے

(۲) متناظر وسطانیوں کے مربعوں میں ہے

(۳) اندرونی دائروں کے قطروں کے مربعوں میں ہے

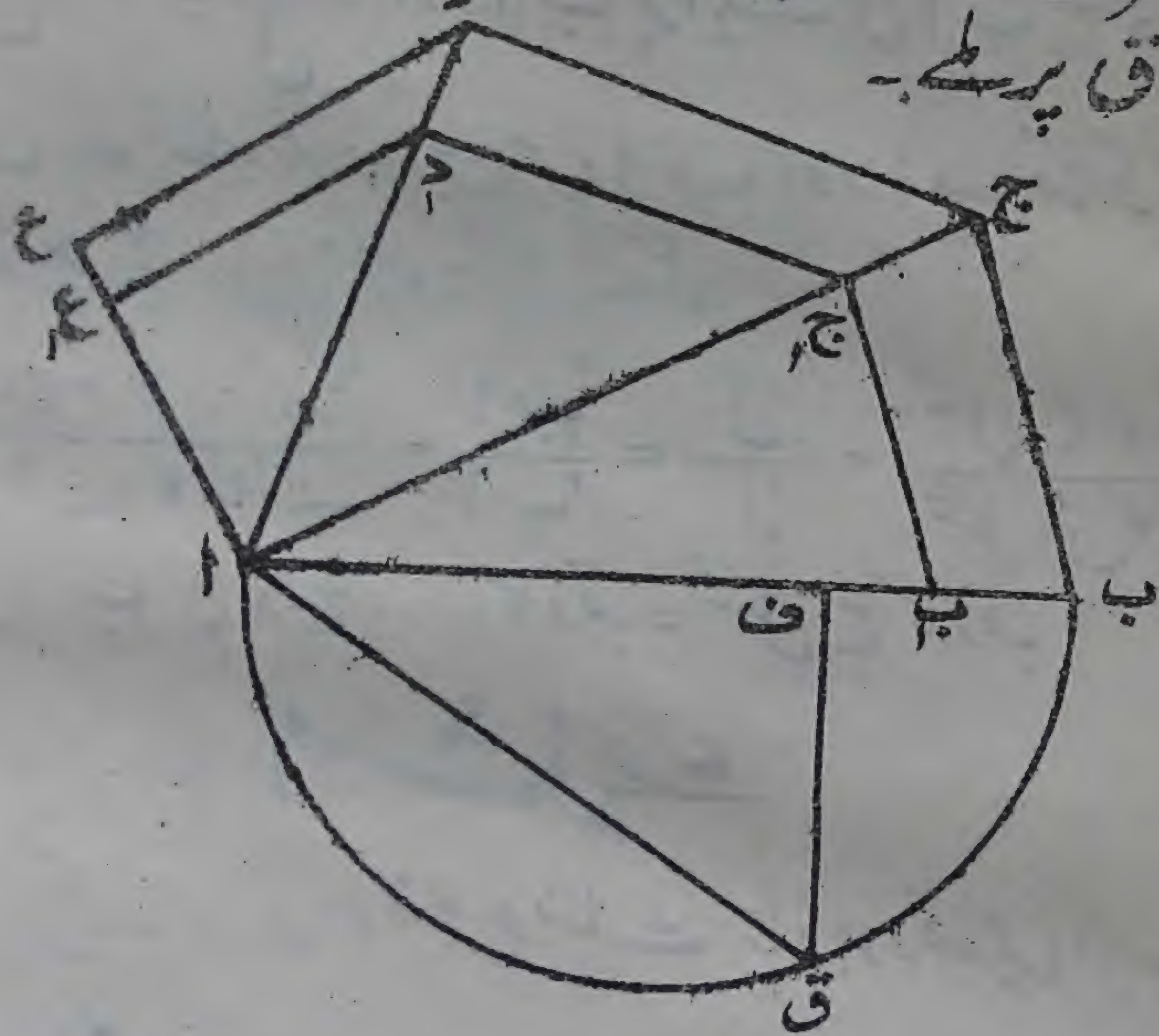
(۴) حاطط دائروں کے قطروں کے مربعوں میں ہے۔

مسئلہ عملی - ایک کثیر الاضلاع بنانا جو ایک دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے متشابه ہو اور جس کے رقبہ کو دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ ایک معلوم نسبت م : ن ہو۔

فرض کرو کہ دیا ہوا کثیر الاضلاع اب ج د ع ہے اب پر نقطہ ف ایسا معلوم کرو کہ

$$\frac{اف}{اب} = \frac{م}{ن}$$

اب کو قطران کرہ اترہ کھینچو اور ف سے اب پر عمود ف ق کھینچو جو
دائرہ سے ق پر ملے۔



اب پر نقطہ ب ایسا معلوم کرو کہ اب = اق
اب پر ایک شکل اب ج د ع بناؤ جو دی ہوئی شکل اب ج د ع
کے متشابه ہو۔ تب شکل اب ج د ع مطلوبہ شکل ہو گئی۔

$$\text{کیونکہ شکل اب ج د ع کا رقبہ} = \frac{\text{اب}^2}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ا ق}^2}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ا ف}}{\text{ا ب}} \\ = \frac{\text{ا ف}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

۳۵۔ مسئلہ عملی۔ ایک کثیر الاضلاع بنانا جو ایک دیے ہوئے
کثیر الاضلاع ش کے متشابه ہو اور رقبہ میں ایک اور دیے ہوئے کثیر الاضلاع
ع کے مساوی ہو۔

اشکال ش اور ع کو مربعوں میں تبدیل کرو۔
فرض کرو کہ ان مربعوں کے ضلعوں کے طول بالترتیب ل اور ل
ہیں اگر شکل ش کا ایک ضلع اب ہو تو ایک خط اب ایسا معلوم کرو کہ

$$\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ل}{ل} \text{ اور } ا ب \text{ پر ایک شکل } ا ب ج د ع \dots$$

بناؤ جو شکل ش کے تشابہ ہو اور جن میں ا ب اور ا ب تناظر ضلع ہوں
تب ا ب ج د ع ... مطلوبہ شکل ہوگی

$$\text{کیونکہ شکل } ا ب ج د ع \dots \text{ کا رقبہ} = \frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ل}{ل} = \frac{\text{شکل ع کا رقبہ}}{\text{شکل ش کا رقبہ}}$$

اس لیے شکل ا ب ج د ع ... کا رقبہ = شکل ع کا رقبہ

امثلہ

(۱) ایک مساوی الاضلاع مثلث بناؤ جو رقبہ میں ایک دیے ہوئے
مثلث کے مساوی ہو۔

(۲) ایک مثلث مساوی الاضلاع بناؤ جس کا رقبہ دو دیے ہوئے
مساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہو۔

(۳) ایک مثلث بناؤ جس کے اضلاع ۴ : ۵ : ۷ کے تناسب ہوں
اور جس کا رقبہ ۵ مربع اینچ ہو۔

(۴) ذواربعتہ الاضلاع ا ب ج د بناؤ جس میں ا ب = ۳ سم
ب ج = ۴ سم د = ۵ سم اور ا د = ۶ سم اس کے تشابہ ایک
ذواربعتہ الاضلاع بناؤ جس کا رقبہ ۲ ضلع پر کے مساوی الاضلاع مثلث کے
رقبہ کے مساوی ہو۔

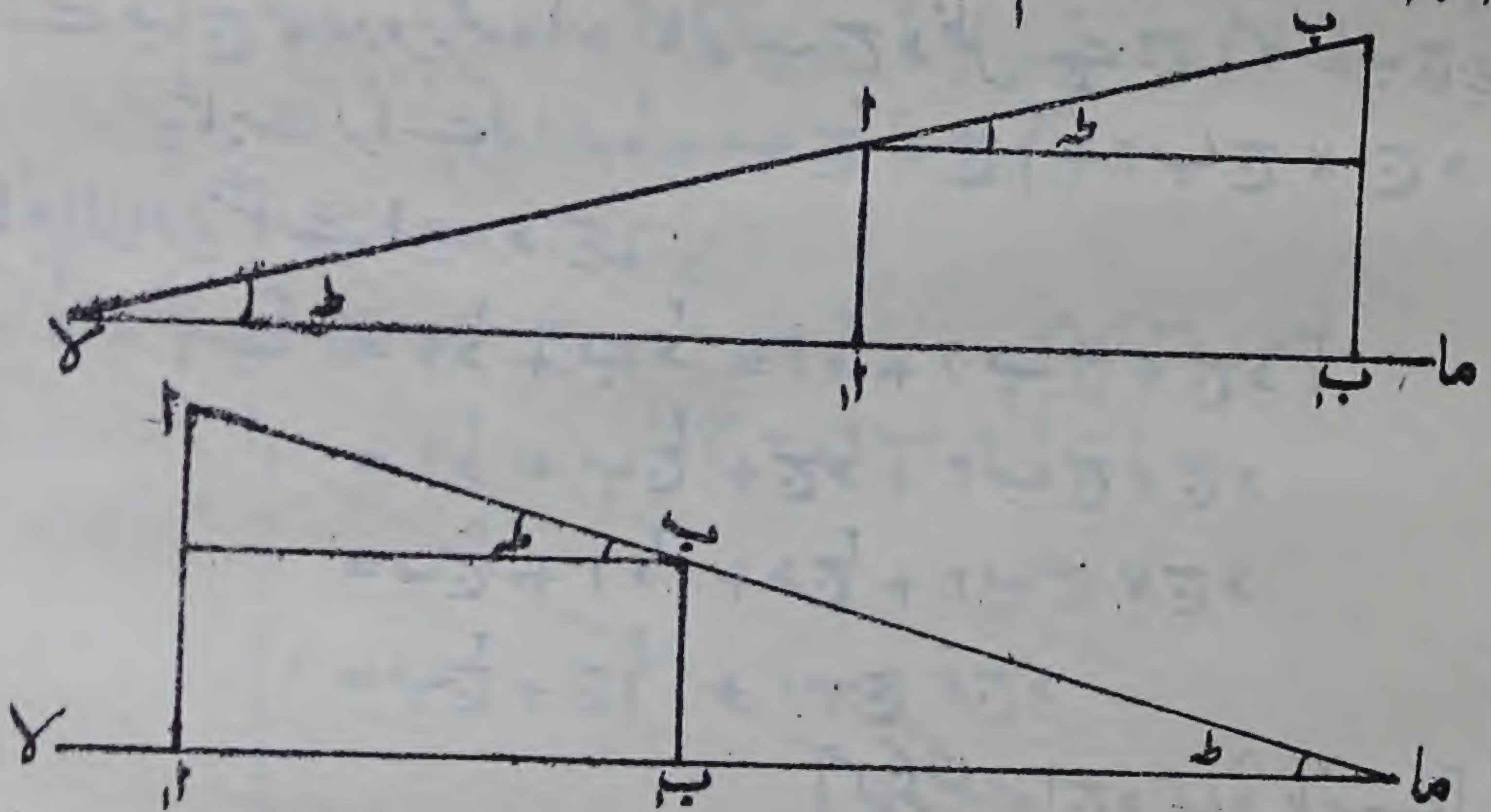
(۵) ایک شکل معین بناؤ جس کا ایک زاویہ ۶۰ کا ہو اور جس کا رقبہ ۲
ضلع پر بنے ہوئے منتظم سدس کے رقبہ کے مساوی ہو۔

(۶) ایک متساوی الساقین مثلث بناؤ جس کا راسی زاویہ ۵۰ کا ہو اور
جس کا رقبہ اس مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو جس کے اضلاع ۲، ۳، ۵ ہیں۔

تیسرا باب

مثلث کے خواص

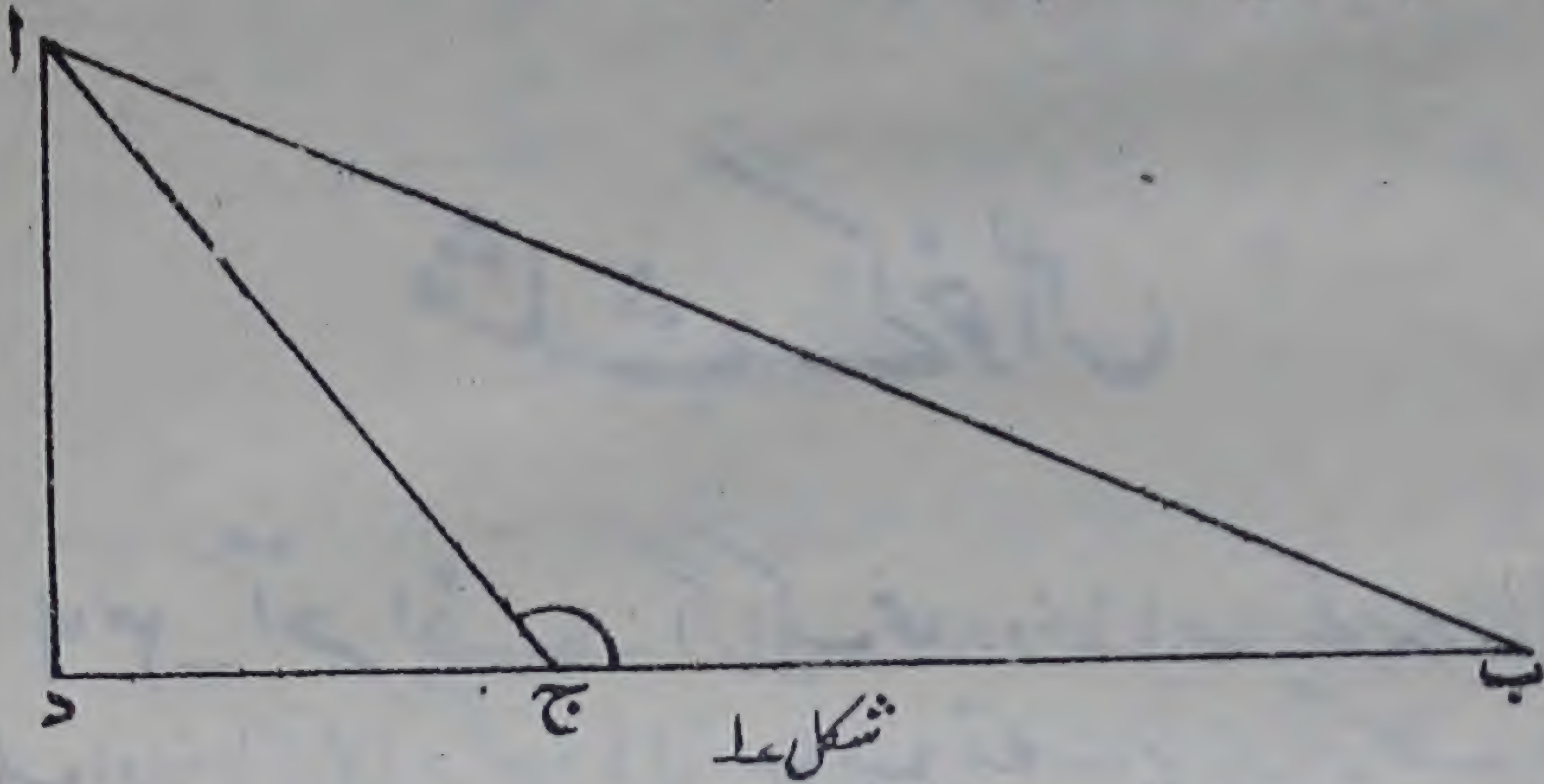
۳۶۔ تعریف۔ اگر ایک محدود خط AB کے سرور A اور B سے ایک اور خط لایا جائے اور AB کے نکالے جائیں تو محدود خط AB کا قائم ظل کہلاتا ہے خط لایا پر۔



اگر AB اور لایا کا درمیانی حادہ زاویہ $ط$ ہو تو AB کا طول مساوی ہوگا $AB \times \sin ط$

۳۷۔ مسئلہ۔ (فیثاغورث کے مسئلہ کی توسیع)

کسی مثلث کے ایک ضلع پر کا مربع بڑا ہوتا ہے، مساوی ہوتا ہے، چھوٹا ہوتا ہے باقی دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعہ سے بموجب اس کے کہ ان ضلعوں کا درمیانی زاویہ منفرجہ ہو، قائمہ ہو یا حادہ ہو اور غیر مساوی ہونے کی صورت میں ان کا فرق دو ضلعوں میں سے ایک ضلع اور اس ضلع پر دوسرے ضلع کے ظل کے حاصل ضرب کا دو چندان ہوتا ہے۔



صورت اول۔ فرض کرو کہ مثلث ABC میں $\angle C$ منفرجہ ہے۔ اسے BC محدودہ پر عمود AD نکالو تب BC د ظل ہے AC کا خط BC پر۔ یہ ثابت کرنا ہے کہ $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \times BC \times CD$ قائم الزاویہ مثلث ABC میں

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + (AC^2 + CD^2) + 2 \times AC \times CD$$

$$= AD^2 + BD^2 + AC^2 + CD^2 + 2 \times AC \times CD$$

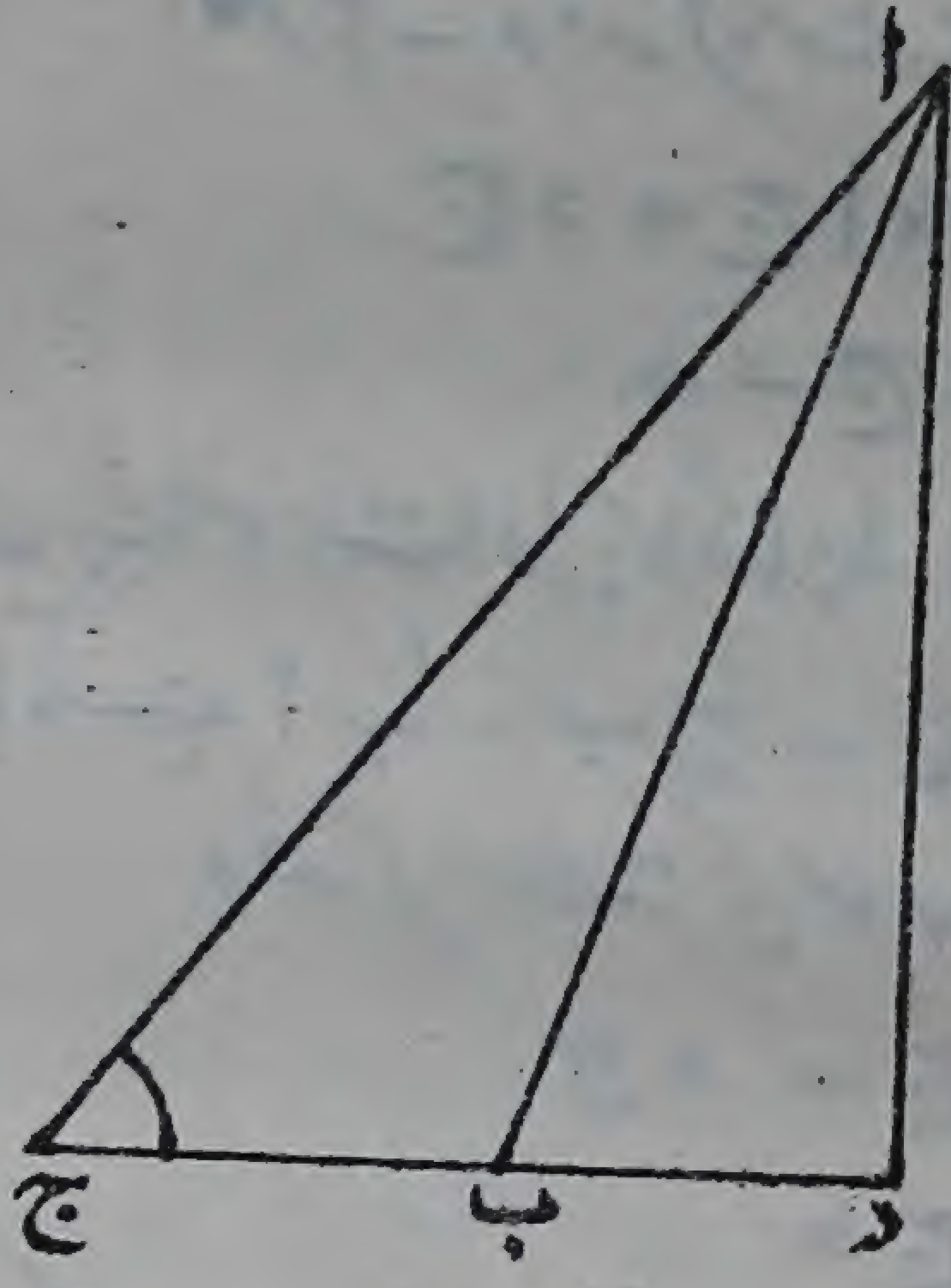
$$= BD^2 + AD^2 + AC^2 + CD^2 + 2 \times AC \times CD$$

$$= BD^2 + AC^2 + CD^2 + 2 \times AC \times CD$$

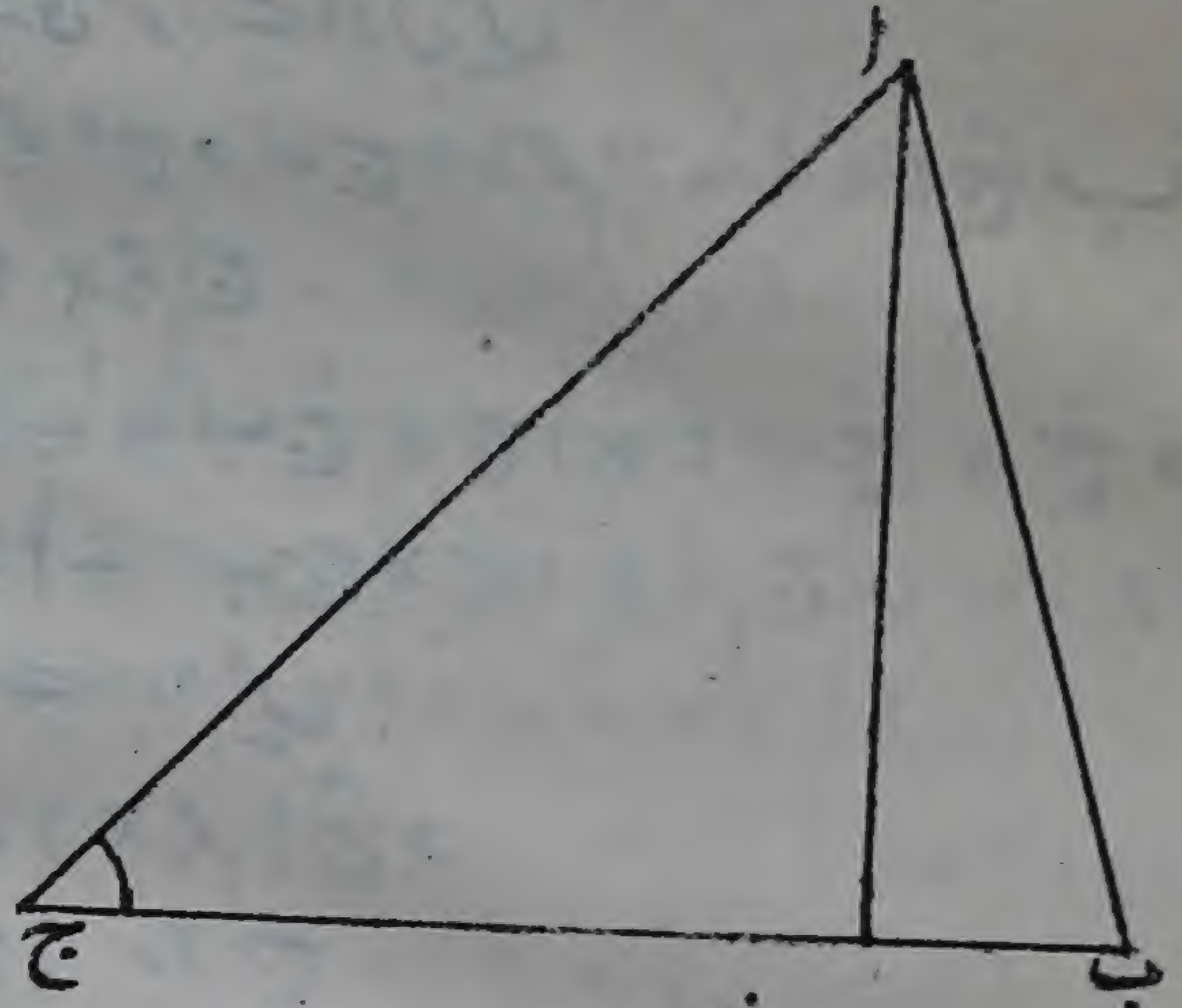
[کیونکہ مثلث ABC میں $\angle C$ قائمہ ہے]

صورت دوم۔ فرض کرو کہ مثلث ABC میں $\angle C$ حادہ ہے۔ اسے BC پر عمود AD نکالو تب BC د ظل ہے AC کا خط BC پر

یہ ثابت کرنا ہے کہ $اب^2 = با^2 + ج^2 - ۲ با ج \times دج$ -



شکل ۱



شکل ۲

قائم الزاویہ مثلث ABD میں

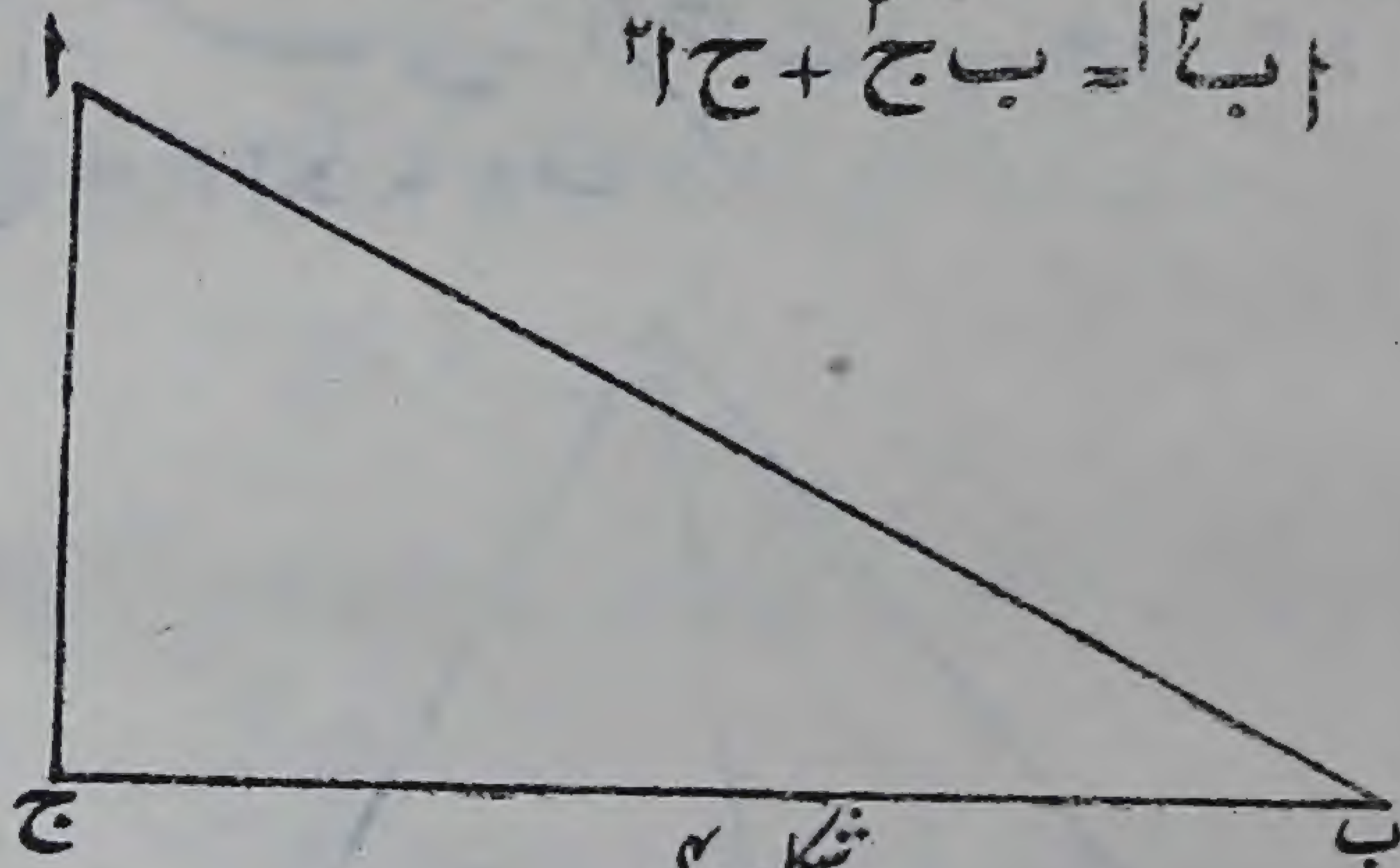
$$اب^2 = ادا^2 + دب^2 = ادا^2 + (بج - دج)^2$$

$$= ادا^2 + باج^2 + ج^2 - ۲ باج \times دج$$

$$= باج^2 + ادا^2 + ج^2 - ۲ باج \times دج$$

$$= باج^2 + ج^2 - ۲ باج \times دج$$

[کیونکہ مثلث ADC میں $د$ قائمہ ہے]
صورت سوم۔ اگر مثلث ABC میں $ج$ قائمہ ہو تو
 $اب^2 = با^2 + ج^2$



شکل ۳

یہ فیثاغورث کا مسئلہ ہے اور طالب علم اس کے ثبوت سے پہلے ہی سے

واقف ہے۔ ان تینوں صورتوں کو ملائے سے مسئلہ دفعہ ہذا ثابت ہوا۔

۳۸۔ دفعہ گزشتہ کی صورت اول میں

$$\text{ج د} = \text{ج ا} \times \text{جم ا ج د} = \text{ج ا} \times \text{جم} \quad (۱۸۰ - \text{ا ج ب})$$

$$= \text{ج ا} \times \text{جم ج}$$

اس لیے صورت اول کا ضابطہ ا ب ا = ب ج + ج ا + ا ب ج × ج د

ہو جاتا ہے ا ب ا = ب ج + ج ا - ا ب ج × ج ا × جم ج (۱)

دفعہ گزشتہ کی صورت دوم میں

$$\text{ج د} = \text{ج ا} \times \text{جم ا ج د}$$

$$= \text{ج ا} \times \text{جم ج}$$

اس لیے صورت دوم کا ضابطہ ا ب ا = ب ج + ج ا - ا ب ج × ج د

ہو جاتا ہے ا ب ا = ب ج + ج ا - ا ب ج × ج ا × جم ج (۲)

دفعہ گزشتہ کی صورت سوم میں ج قائمہ ہے اس لیے جم ج = ۰

اس لیے صورت سوم کا ضابطہ ا ب ا = ب ج + ج ا ہو جاتا ہے

ا ب ا = ب ج + ج ا - ا ب ج × ج ا × جم ج (۳)

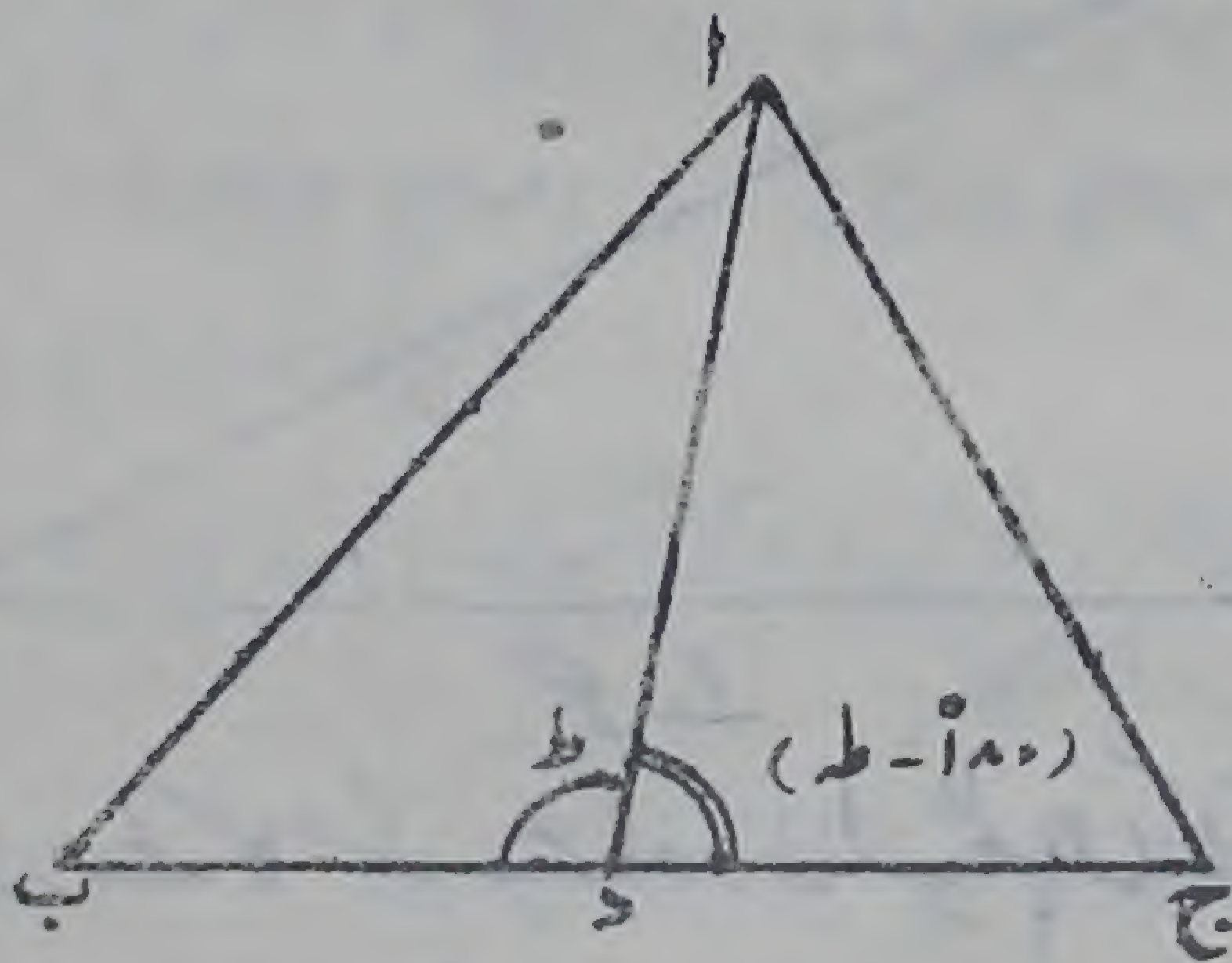
ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) کو علم مثلث کی ترقیم کے مطابق

شکل ج = ا + ب - ا ب ج میں لکھا جاسکتا ہے اور یہ ضابطہ

درست ہے خواہ ج حادہ ہو یا قائمہ یا منفرجہ

۳۹۔ مسئلہ۔ اگر مثلث ا ب ج میں ا د ایک وسطانیہ ہو تو

$$\text{ا ب ا} + \text{ا ج} = \text{ا د} + \text{ا د} + \text{ا ب د}$$



اس لیے $\hat{A} \hat{J} = J - I - P$

نیزاج = ادا + دج - ۲ ادا دج x دج x جم (۱۸۰-ط)

$$(2) \dots\dots\dots = 12 + 2x + 1 =$$
$$اب^2 + اج^2 = ۲ | د^2 + ۲ ب^2$$

(۱) مثلث ا ب ج میں $\hat{C} = 90^\circ$ تو ثابت کرو کہ $\hat{J} + \hat{B} = \hat{A}$ ۔ ا ب

اور اگر ج = ۱۲۰ تو ثابت کرو کہ ج = ر + ب + ر + ب

(۲) مثلث ا ب ج میں ضلع ب ج پر کوئی نقطہ لا ہے۔ اگر اس نقطہ کا

منطبق ہو جائے تو دفعہ ۳ کی مدد سے حاصل کرو کہ ب ج = ب لا + لا ج + ا ب لا - لا ج

(۳) مثلث ا ب ج میں $\overline{AR} = \overline{AQ}$ ، $\angle B = \angle C$ اور $\angle A = 50^\circ$

(جواب ۱ = ۹۰)

(۴) ایک مثلث کے اضلاع ۷، ۸، ۹ سم ہیں اس کے خطوط وسطی کے طول معلوم کرو۔
(جواب ۱ = ۹.۰)

[جواب] $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$

(۵) ایک مثلث کے خطوط وسطی کے طول l ، m ، n ہیں۔ اضلاع کے طول محسوب کرو۔

[جواب ۲م [۲م + ۲ن - ۲] ...]

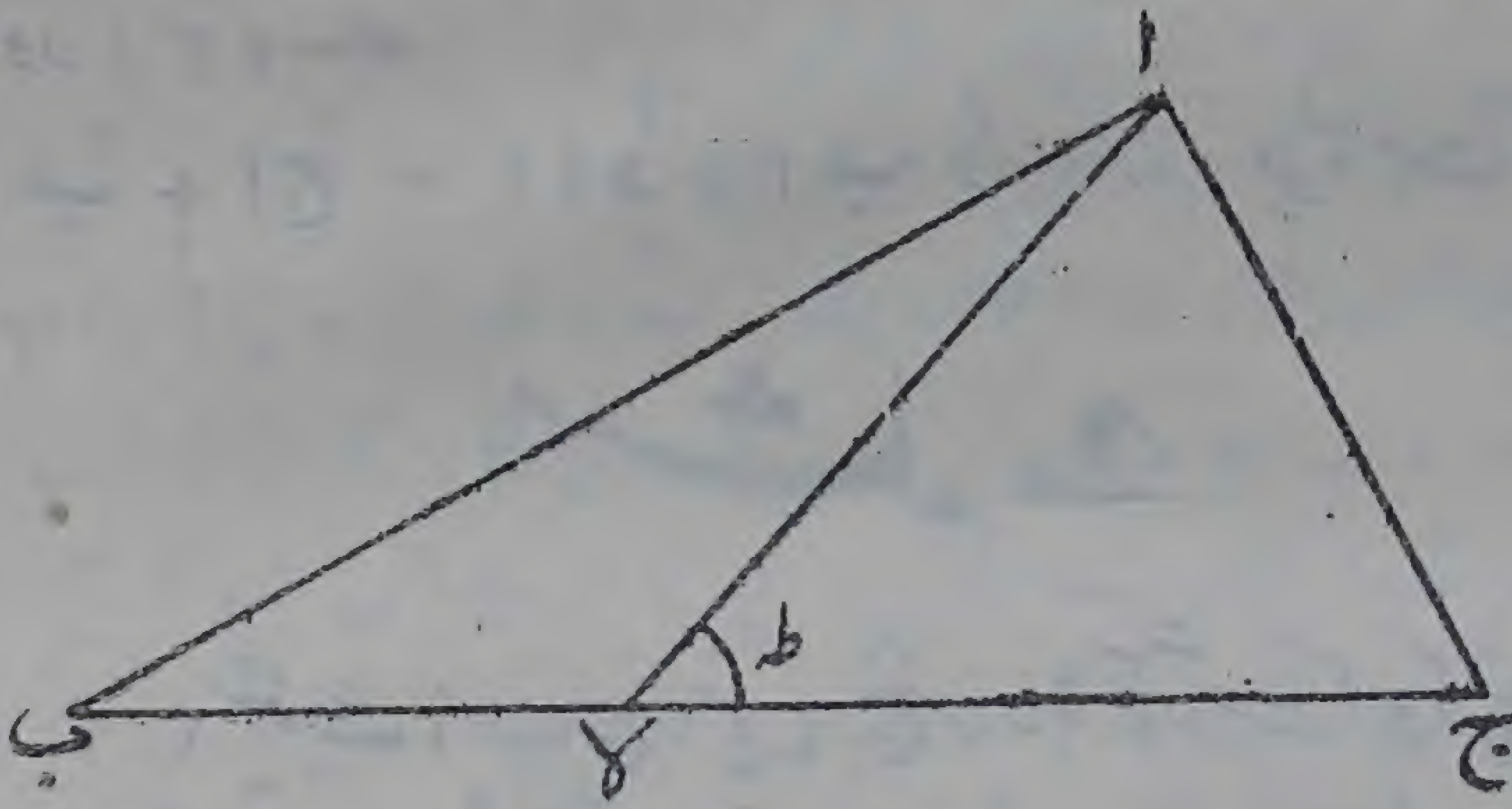
(۶) ایک متوازی الاضلاع کے ضلعوں پر کے مربعوں کا مجموعہ اس کے وتروں

پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

(۷) کسی ذواربعتہ الاضلاع میں وتروں پر کے مربعوں کا مجموعہ متقابل کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملائے والے خطوط پر کے مربعوں کے مجموعہ کا دو چندان ہوتا ہے۔

(۸) مثلث ABC کے خطوط وسطی کا نقطہ ترازو ہے، ثابت کرو کہ
 $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(AG^2 + BG^2 + CG^2)$

(۹) مثلث ABC میں B پر نقطہ D ایسا ہے کہ $BD = n \times AC$ ، ثابت کرو کہ $m \times AB^2 + n \times AC^2 = (m+n) \times AD^2$
 (اپولوینی ٹیس کا مسئلہ)



[اشارہ۔ فرض کرو کہ $AD = x$]

$$(1) AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2AD \cdot DC \cdot \cos \angle ADC$$

$$(2) AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DC \cdot \cos \angle ADC$$

(۱) کو m سے اور (۲) کو n سے ضرب دے کر جمع کرنے سے مطلوبہ نتیجہ

حاصل ہوتا ہے۔ یہ نتیجہ مسئلہ دفعہ ۳۹ کی عام شکل ہے۔

۴۰۔ مسئلہ۔ (سمسن کا خط) ایک مثلث کے حائط دائرہ پر

کسی نقطہ سے مثلث کے اضلاع پر عمود نکلانے جائیں تو عمودوں کے پائین ایک خط مستقیم میں واقع ہوتے ہیں۔

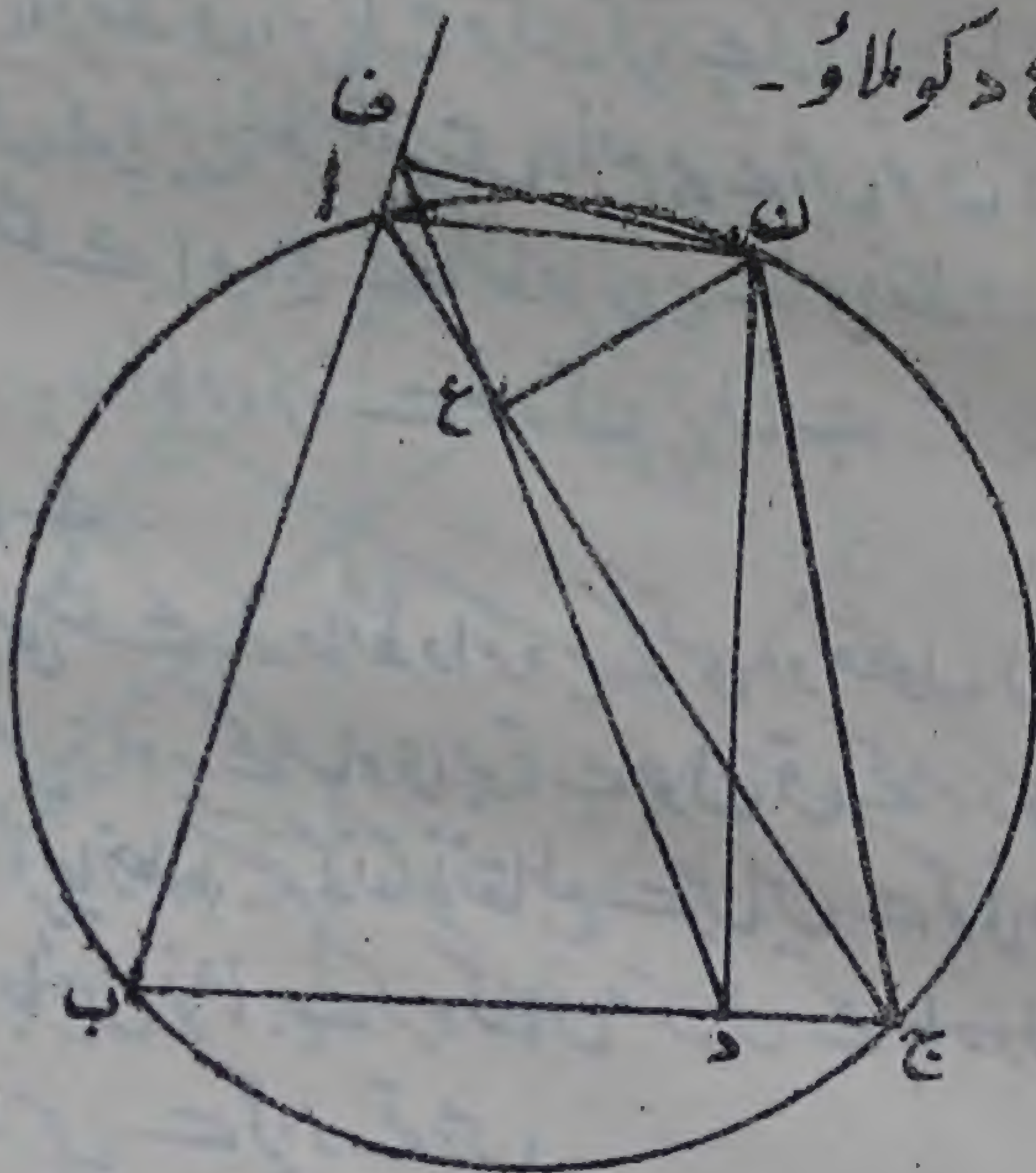
فرض کرو کہ مثلث ABC کے حائط دائرہ پر کوئی نقطہ N ہے

اور N سے مثلث کے اضلاع BC ، CA ، AB پر عمود بالترتیب

N ، D ، E ، F کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ نقاط D ، E ، F

ہم خط ہیں۔

ف ع د کو ملاؤ۔



چونکہ $\angle F = \angle E = \angle A$ قائمہ
 اس لیے نقاط F, E, A مشترک محیط ہیں۔
 اس لیے $\angle F = \angle E = \angle A$ قائمہ
 (کیونکہ نقاط F, E, A مشترک محیط ہیں)۔
 نیز $\angle E = \angle C = \angle D$ قائمہ زاویہ
 اس لیے نقاط E, C, D مشترک محیط ہیں۔
 اس لیے $\angle E = \angle D$ مکمل ہے $\angle C = \angle D$ کا
 یعنی $\angle E = \angle D$ مکمل ہے $\angle C = \angle D$ کا
 یعنی F, E, D خط مستقیم ہے۔ یہی ثابت کرنا تھا۔
 نوٹ۔ خط F, E, D کو مثلث ABC کے لمبا سے حاطہ دائرہ پر
 نقطہ N کا خط پائین یا من خط کہتے ہیں۔

مشکل ۹

(۱) (۱) ایک نقطہ سے مثلث ABC کے اضلاع پر عمود نکالے گئے ہیں۔

اگر عمودوں کے پائین خط مستقیم میں ہوں تو ثابت کرو کہ ق، مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ پر ہے۔

(ب) اگر نقطہ ق اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ق سے مثلث ا ب ج کے اضلاع پر نکالے ہوئے عمودوں کے پائین خط مستقیم میں واقع ہوتے ہیں تو ق کا طریق معلوم کرو۔

(۲) مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ پر کے کسی نقطہ ن سے ب ج پر عمود ن د نکالا گیا ہے اور یہ حائط دائرہ سے مکرر ن پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا خط پائین ان کے متوازی ہے۔

(۳) کسی مثلث کے حائط دائرہ پر کے کسی دو نقطوں ن اور ق کے سمبند خطوں کا درمیانی زاویہ اس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ن ق کے محاذی دائرہ پر بنتا ہے۔

(۴) اگر چار خطوط مستقیم کے نقاط تقاطع سے جن میں سے کوئی دو باہم متوازی نہ ہوں چار مثلث بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ ان مثلثوں کے چاروں حائط دائرے ایک مشترک نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

(۵) کسی نقطہ کا سمبند خط نقطہ نڈ کو رکو مثلث کے عمودی مرکز سے ملانے والے خط کی تنصیف کرتا ہے۔

مہم مسئلہ۔ (نو نقطی دائرہ)۔ کسی مثلث میں اضلاع کے وسطی نقطے

رأسوں سے مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے پائین اور مثلث کے عمودی مرکز کو رأسوں سے ملانے والے خطوں کے وسطی نقطے مشترک محیط ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے وسطی نقطے بالترتیب د، ع، ف ہیں۔

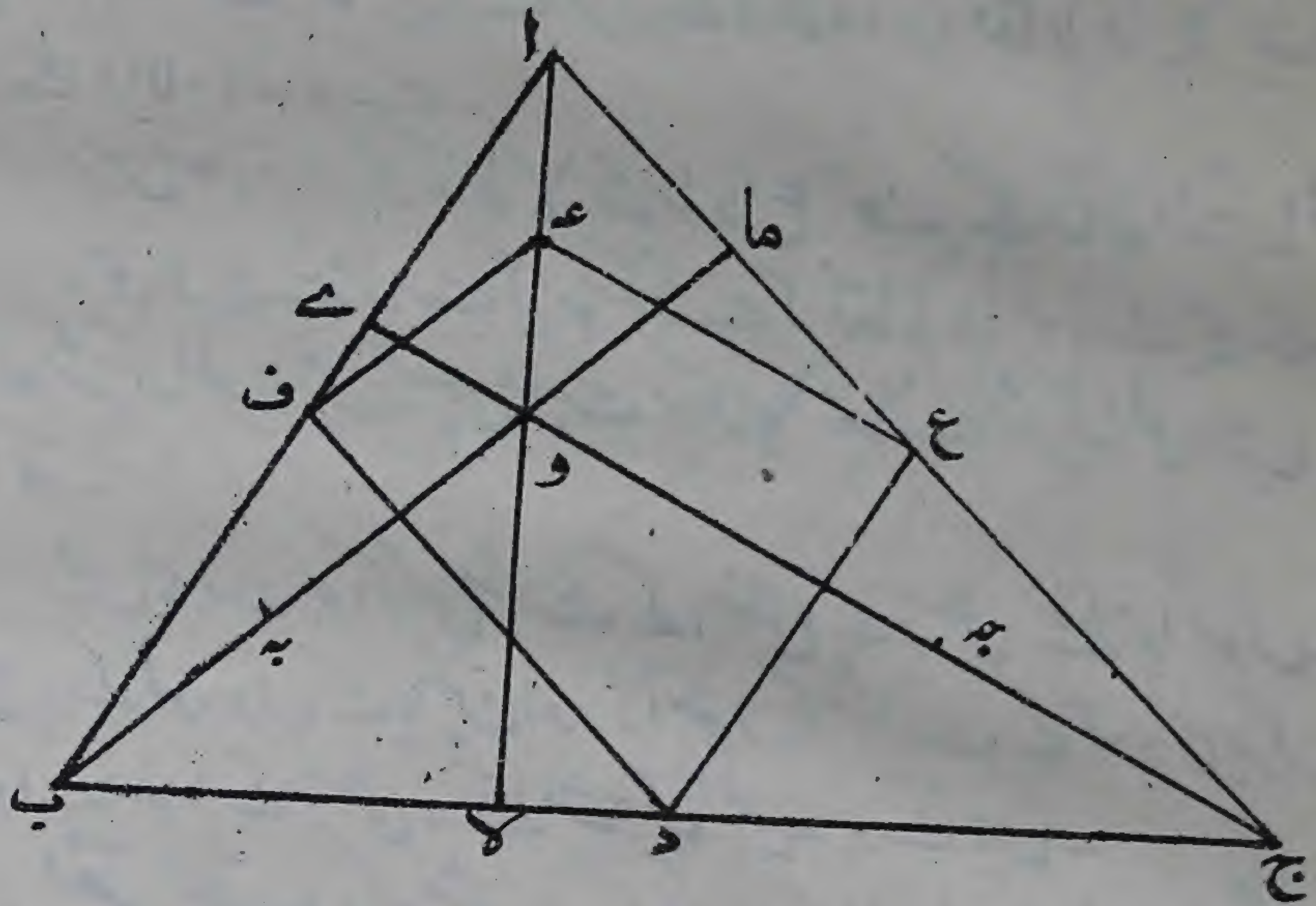
اور رأسوں ا، ب، ج سے مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے پائین بالترتیب لا، ما، مے ہیں۔

نیز فرض کرو کہ ان عمودوں کا نقطہ تراکز یعنی مثلث کا عمودی مرکز وہ ہے اور ا، ب، ج کے وسطی نقطے بالترتیب ع، م، لہ، جہ ہیں۔

پہلے ہم ثابت کریں گے کہ ع، م، لہ، جہ مشترک محیط ہیں د، ع، ف کے ساتھ۔

چونکہ د اور ف بالترتیب وسطی نقطے ہیں ب ج اور ا ب کے

اس لیے د ف // ا ج



نیز چونکہ ع اور ف بالترتیب وسطی نقطے ہیں ا و اور ا ب کے
اس لیے ع ف // ب م
اس لیے د ف اور ع ف کا درمیانی زاویہ مساوی ہے ا ج اور ب م کے
درمیانی زاویہ کے جو کہ قائمہ ہے

د ف ع = قائمہ زاویہ
د ع ع = قائمہ زاویہ
اسی طرح اس لیے نقطہ ع نقاط د ع ، ف کے ساتھ مشترک محیط ہے۔
اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ نقاط ب و اور ج بھی مشترک محیط ہیں
د ع ، ف کے ساتھ۔
پس ثابت ہوا کہ ع ، ب ، ج مشترک محیط ہیں د ع ، ف کے ساتھ۔
اب ہم ثابت کریں گے کہ نقاط لا ، م اے بھی مشترک محیط ہیں
د ع ، ف کے ساتھ۔
چونکہ ع لا د قائمہ زاویہ ہے اور نیز ع ف د بھی قائمہ ہے۔
اس لیے نقاط ع ، ف ، لا ، د مشترک محیط ہیں۔

یعنی نقطہ لا نقاط ع، ف، د میں سے گزرنے والے دائرہ پرواقع ہے
لیکن نقاط ع، ف، د میں سے گزرنے والا دائرہ نقاط د، ع، ف میں سے
گزرنے والا دائرہ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ نقطہ لا نقاط د، ع، ف کے ساتھ مشترک المحيط ہے۔
اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ نقاط ما اور مے بھی نقاط د، ع، ف
کے ساتھ مشترک المحيط ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ لا، ما، مے مشترک المحيط ہیں د، ع، ف
کے ساتھ۔

پس ثابت ہوا کہ کسی مثلث کے اضلاع کے وسطی نقطے، رأسوں سے مقابل کے
اضلاع پر کے عمودوں کے پائین اور رأسوں کو مثلث کے عمودی مرکز سے
ملانے والے خطوط کے وسطی نقطے مشترک المحيط ہوتے ہیں۔

تعریف: کسی مثلث کے مندرجہ بالا نو نقطوں میں سے گزرنے والے
دائرہ کو مثلث کا نو نقطی دائرہ کہتے ہیں اور اس دائرہ کے مرکز کو نو نقطی مرکز کہتے ہیں۔
۴۲۔ مسئلہ۔ کسی مثلث میں (۱) نو نقطی مرکز، حائط مرکز اور
عمودی مرکز کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔

اور (۲) نو نقطی دائرہ کا قطر مثلث کے حائط دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہوتا ہے۔
نیز (۳) ہندسی مرکز ہم خط ہوتا ہے حائط مرکز، نو نقطی مرکز اور عمودی مرکز کے ساتھ۔
فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا حائط مرکز س ہے، عمودی مرکز و ہے
اور نو نقطی مرکز ن ہے۔

ثابت کرنا ہے کہ (۱) نقطہ ن خط س و کا نقطہ تنصیف ہے اور
(۲) نو نقطی دائرہ کا قطر حائط دائرہ کے نصف قطر س ا کے مساوی ہے اور نیز (۳)
مثلث کا ہندسی مرکز یعنی مرکز ثقل خط س و پر ہے۔

(۱) دفعہ گزشتہ کی ترقیم کے مطابق چونکہ نو نقطی دائرہ نقاط د اور لا
میں سے گزرتا ہے۔

اس لیے نو نقطی مرکز د لا کے عمودی منصف پر ہوگا۔
اسی طرح سے نو نقطی مرکز ما ع کے عمودی منصف پر بھی ہوگا۔

پس وس کے وسطی نقطہ پر نو نقطی مرکز بن ہوگا۔
(۲) چونکہ نو نقطی دائرہ نقاط د' لا' ع' میں سے گزرتا ہے اور چونکہ د' لا' ع' قائم زاویہ ہے اس لیے ع' د نو نقطی دائرہ کا ایک قطر ہے اس لیے ع' د نو نقطی مرکز بن میں سے گزرتا ہے۔
چونکہ و' ا اور وس کے وسطی نقطے بالترتیب ع' اور ن ہیں اس لیے ع' ن (جو نو نقطی دائرہ کا نصف قطر ہے) متوازی ہے اور نصف ہے اس کا۔
اس لیے نو نقطی دائرہ کا قطر ع' د مساوی ہے اس کے جو محیط دائرہ کا نصف قطر ہے۔
(۳) چونکہ ع' د متوازی ہے ا' س کے اور ا' ع' متوازی ہے س' د کے اس لیے ا' ع' مساوی ہے س' د کے اس لیے ا' و' دگنا ہے س' د کا

فرض کرو کہ وسطانیہ ا د خط س و سے ٹ پر ملتا ہے
اب تشابہ مثلثات ا ٹ و اور د ٹ س میں

$$\frac{اٹ}{دٹ} = \frac{ا و}{د س} = \frac{۲}{۱}$$

اس لیے وسطانیہ ا د کی داخلی تقسیم نسبت ۲ : ۱ میں ٹ پر ہوتی ہے۔
اس لیے ٹ مثلث ا ب ج کا ہندی مرکز (مرکز ثقل) ہے۔
پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نقطہ ٹ - مسئلہ بالا (۳) میں تشابہ مثلثات ا ٹ و اور د ٹ س سے
حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{وٹ}{ٹ س} = \frac{ا و}{د س} = \frac{۲}{۱}$$

یعنی مثلث کا مرکز ثقل ٹ، عمودی مرکز و اور عاٹ مرکز س کو ملائے والے
خط کی داخلی تقسیم نسبت ۲ : ۱ میں کرتا ہے۔

مسئلہ ۱۰

(۱) دفعہ ۴ کے مسئلہ کو استعمال کرنے کے بغیر اسی دفعہ کی ترقیم کے مطابق
ثابت کرو کہ

(۱) لا مشترک المحيط ہے ع، ہ، ج کے ساتھ

(ب) د مشترک المحيط ہے ع، ہ، ج کے ساتھ

(ج) ع مشترک المحيط ہے لا، ما، اے کے ساتھ

(د) د مشترک المحيط ہے لا، ما، اے کے ساتھ

(۲) دفعہ ۴ کی شکل میں ثابت کرو کہ ع ف د جہ مستطیل ہے۔

(۳) دفعہ ۴ کی شکل میں ثابت کرو کہ ع د = ہ ع = ج ف

(۴) ثابت کرو کہ ترقیم سابقہ کے مطابق ا د اور ع س ایک دوسرے کی

تصنیف کرتے ہیں۔

(۵) معمولی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ $۱ = ۲$ و حجم ۱
(۶) ایک مثلث کا قاعدہ اور اُسی زاویہ دونوں معلوم ہیں۔ مثلث کے نقطہ

مرکز کا طریق معلوم کرو۔

(۷) مثلث ا ب ج کے جانبی دائروں کے مرکز مے مے مے ہیں۔ ثابت کرو

مثلث ا ب ج کا حاطہ دائرہ مثلث مے مے مے کا نو نقطہ دائرہ ہے اور اس سے حاصل
کرو کہ مثلث ا ب ج کا حاطہ دائرہ مثلث مے مے مے کے اضلاع کی تنصیف

کرتا ہے۔

(۸) مثلث ا ب ج کا عمودی مرکز وہ ہے ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کا

نو نقطہ دائرہ مثلثات ا ب ب و ج اور ج و ا کا بھی نو نقطہ دائرہ ہے۔

(۹) مثلث کا ایک راس اور نو نقطہ دائرہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث

کے عمودی مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۱۰) ایک مثلث کا ایک راس عمودی مرکز اور نو نقطہ دائرہ کا مرکز معلوم

ہیں، مثلث بناؤ۔

(۱۱) ایک مثلث کے دو راسی اور نو نقطہ دائرہ کا مرکز معلوم ہیں، مثلث بناؤ۔

(۱۲) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے

مثلث پائین کا ایک ضلع اور ایک زاویہ مستقل ہیں۔

مثلاً۔ مثلث ا ب ج کے زاویہ ا کا اندرونی منصف

قاعدہ ب ج سے د پر ملے تو

ا ب \times ا ج = ا د + ب د د ج

مثلث ا ب ج کا حاطہ دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ ا د ممدودہ حاطہ دائرہ

سے ع پر ملتا ہے۔ ج ع کو ملاؤ۔

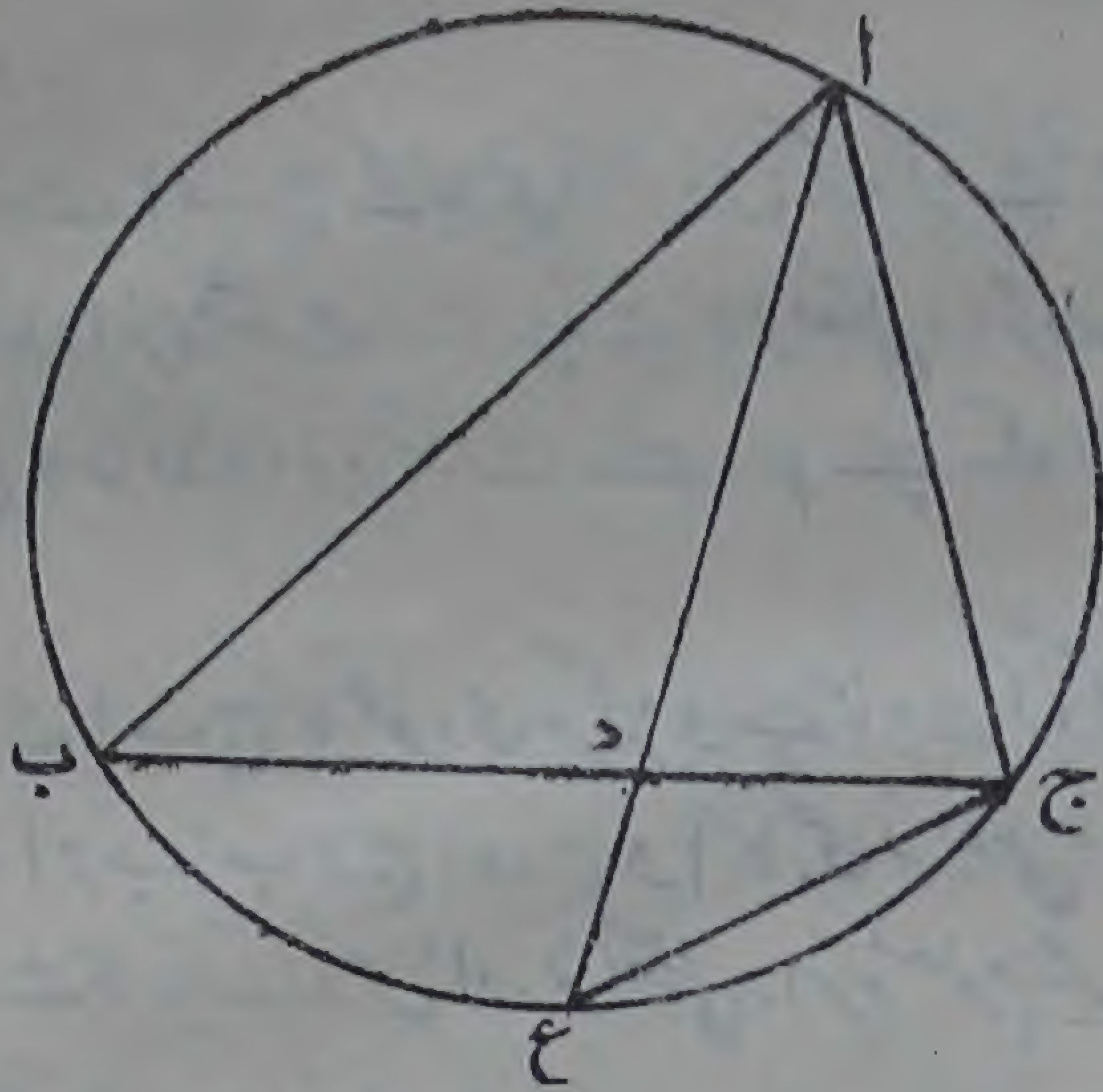
مثلثات ا ب د اور ا ع ج میں

ا ب د = ا ع ج

ب ا د = ا ع ج

مثلثات ا ب د اور ا ع ج متشابه ہیں۔

$$\frac{ab}{ac} = \frac{ad}{aj}$$



$$ab \times aj = ac \times ad$$

$$ad = (ad + de)$$

$$ad = ad + de$$

$$ad = ad + de$$

[کیونکہ وتر اے اور ب ج ایک دوسرے کو د پر قطع کرتے ہیں]۔

پس مسئلہ ثابت ہوا

مشق۔ اگر آ کا بیرونی منصف ب ج محدودہ سے د پر ملے تو

$$ab \times aj = ac \times ad$$

خفیہ مٹا: اگر دضہ بالا کی شکل میں اب = اج تو اج = ad × ac۔ اس نتیجہ کا

عکس درست نہیں ہے کیونکہ اگر مثلث متساوی الساقین اب ج کے راس ا میں سے

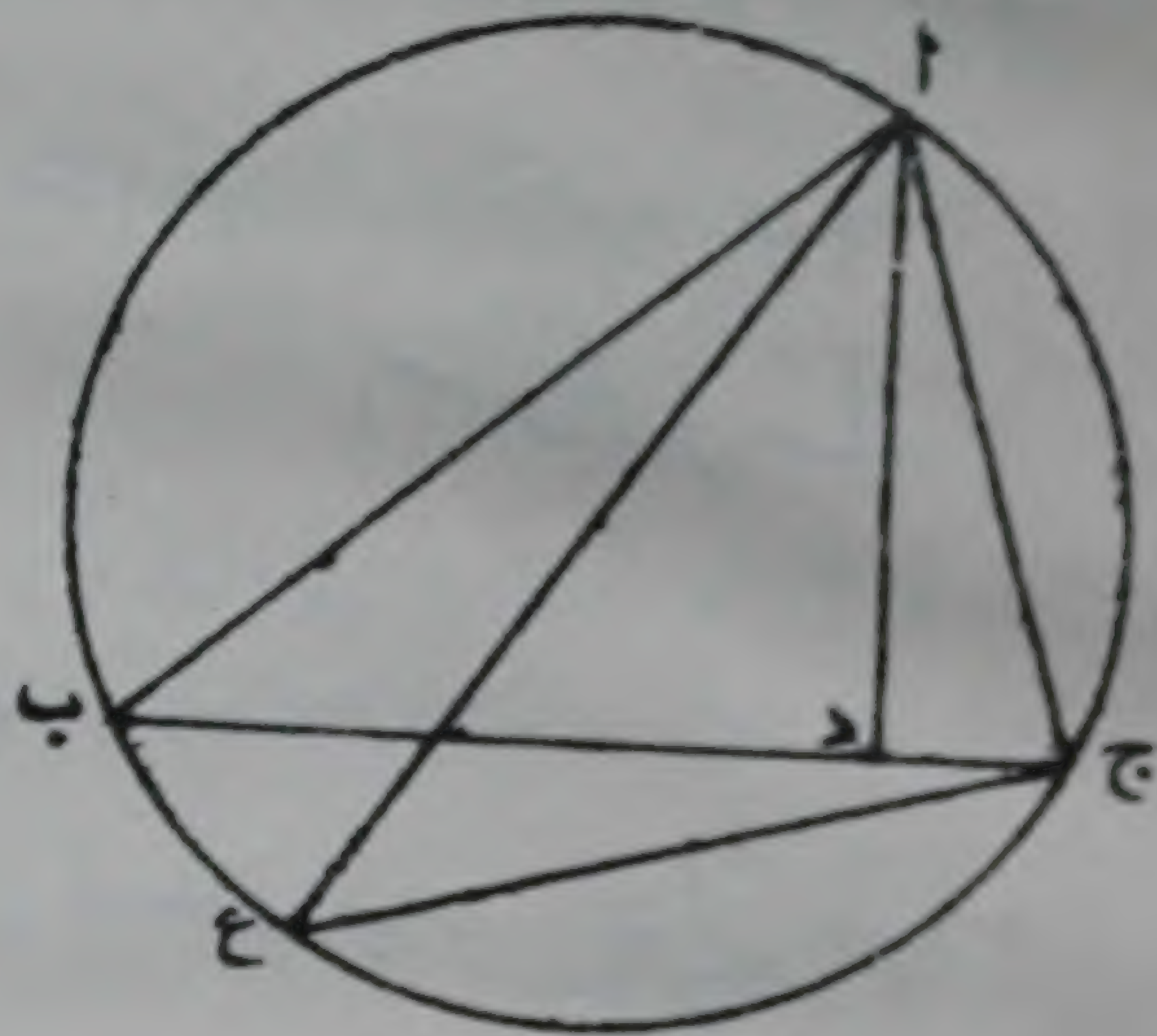
کوئی خط کھینچا جائے جو قاعدہ یعنی محدود خط ب ج سے د پر اور حاطہ دائرہ سے

ع پر ملے تو

$$aj = ad \times ac$$

۴۴۔ اگر مثلث اب ج کے راس ا سے ب ج پر عمود اد ہو

اور اے مثلث اب ج کے حاطد دائرہ کا قطر ہو تو اب \times اج = اد \times اے
ج کو ملاؤ
مثلثات اب د اور اے ج میں



ا ب د = اے ج (کیونکہ یہ ایک ہی قوس کے اندر کے زاویے ہیں)
اور ا د ب = اے ج (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)
اس لیے مثلثات اب د اور اے ج متشابه ہیں

$$\text{اس لیے } \frac{ا ب}{اے} = \frac{ا د}{ا ج}$$

اس لیے ا ب \times ا ج = ا د \times اے - جو ثابت کرنا تھا۔
نفی ثا: - اگر عمود ا د کو ع سے تعبیر کیا جائے تو معمولی ترقیم کے مطابق
اس مسئلہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں:-

$$ب \times ج = ۲ \times ۴$$

جہاں سے حاطد دائرہ کا نصف قطر ہے۔

$$\frac{اے \times ا}{۲} = \Delta$$

$$\text{اس لیے } \frac{\Delta}{۲} = اے$$

ج کی اس قیمت کو اوپر کے نتیجہ میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\Delta^2}{2} \times ۷۲ = \text{ب ج}$$

$$\frac{\text{ب ج}}{\Delta^2} = \text{یعنی حاطہ دائرہ کا نصف قطر}$$

(مقابلہ کرو دفعہ ۲۷ نتیجہ ۳ سے)

مسئلہ ۱۱

(۱) مثلث ا ب ج کے آ کا داخلی ناصف قاعدہ ب ج سے دیر ملتا ہے۔ ا کا طول محسوب کرو۔

$$\text{معمولی ترقیم کے مطابق ب د} = \frac{\text{ج ا}}{\text{ب ج}} \text{ اور د ج} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ب ج}}$$

$$\text{از روئے دفعہ ۲۳ ب ج} = \text{ا د} + \text{ب د} \times \text{د ج}$$

$$= \text{ا د} + \frac{\text{ا ب ج}}{(\text{ب ج})^2}$$

$$\text{اس لیے ا د} = \text{ب ج} \left[۱ - \frac{\text{ا}}{(\text{ب ج})^2} \right] = \text{ب ج} \left[\frac{(\text{ب ج} + \text{ا})(\text{ب ج} - \text{ا})}{(\text{ب ج})^2} \right]$$

اگر مثلث کے محیط یعنی ا + ب + ج کو ۲ س سے تعبیر کیا جائے

$$\text{تو ا د} = \frac{\text{ب ج} \times ۲ \text{ س} (۲ \text{ س} - \text{ا})}{(\text{ب ج})^2}$$

$$\therefore \text{ا د} = \frac{۲ \text{ ب ج} \times \text{س} (۲ \text{ س} - \text{ا})}{(\text{ب ج})^2}$$

$$= \frac{۲ \text{ ب ج}}{\text{ب ج}} \times \frac{\text{س} (۲ \text{ س} - \text{ا})}{\text{ب ج}} = \frac{۱}{۲} \text{ کیونکہ جم} = \frac{۱}{۲}$$

(۲) اگر مثلث اب ج کے زاویہ ا کا خارجی منصف ب ج سے د پر ملے تو

$$\text{ثابت کرو کہ } \frac{2}{3} \frac{ب ج}{ج ب} = \frac{ا د}{ج ب} \times \frac{1}{2}$$

(۳) مثلث بناؤ جس کا قاعدہ ر اسی زاویہ اور باقی دو اضلاع کا حاصل ضرب

معلوم ہیں۔

(۴) مثلث اب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز سے ہے اور ا کے مقابل کے
جانبی دائرہ کا مرکز سے ہے۔ مے ضلع ب ج سے د پر اور حاط دائرہ سے
ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ا د \times ا ف = ا ع \times ا م$$

(۵) Δ اب ج میں اب ج اور ضلع ب ج پر نقطہ د اس طرح لیا گیا ہے کہ

$$ا ب \times ا ج = ا د + ب د \times د ج$$

ثابت کرو کہ ا د زاویہ ب ا ج کا اندرونی ناصف ہے۔

فرض کرو کہ ا د مثلث اب ج کے حاط دائرہ سے ع پر ملتا ہے۔

(دیکھو شکل وقفہ ۴۳)

$$\text{تب } ا د + ب د \times د ج = ا د + ا د \times د ع = ا د \times ا ع$$

$$\text{اس لیے } ا ب \times ا ج = ا د \times ا ع$$

$$\text{یعنی } \frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا ج}{ا ع}$$

$$\text{اور } ا ب \cdot د = ا ع \cdot ج$$

اس لیے امثلہ کے سوال ۹ کی رُو سے

$$(۱) \dots\dots\dots \text{یا تو } ا د ب = ا ج ع$$

$$(۲) \dots\dots\dots \text{یا } ا د ب + ا ج ع = ۲ \text{ قائمہ زاویے}$$

اب ہم ثابت کرینگے کہ نتیجہ (۲) ناممکن ہے

$$\text{اگر } ا د ب + ا ج ع = ۲ \text{ قائمہ زاویے}$$

$$\text{تو } ا ج ع = ا د ج \text{ یعنی } ا ج د = ج ع ا = ج ب ا$$

یعنی اب = اج جو شرائط سوال کے خلاف ہے۔

اس لیے ادب = اج ع

اس لیے با د = ع اج یعنی اد زاویہ اب اج کا اندرونی ناصف ہے۔

(۶) مثلث اب ج میں اب = اج، قاعدہ با ج یا با ج محدودہ پر کوئی نقطہ د ہے ثابت کرو کہ مثلثات اب د اور اج د کے حائط دائروں کے نصف قطر مساوی ہیں۔

(۷) سوال ۶ میں اگر اب اور اج مساوی نہ ہوں تو ثابت کرو کہ مثلثات

اب د اور اج د کے نصف قطروں کی نسبت اب : اج کے مساوی ہے۔

(۸) ایک ذواربعتہ الاضلاع اب ج د دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے۔

دائرہ پر ایک نقطہ ن ایسا معلوم کرو کہ ن ا × ن ج = ن ب × ن د

(اشارہ - ن سے اج پر کا عمود = ن سے ب د پر کا عمود)

(۹) ایک مثلث کا قاعدہ راسی زاویہ دیے گئے ہیں۔ وہ مثلث بناؤ

جس کے اضلاع کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہے۔

(۱۰) ایک ویے ہوئے دائرہ کے اندر ایک ویے ہوئے رقبہ والا مثلث بنایا

گیا ہے۔ ثابت کرو کہ تینوں ضلعوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

(۱۱) ایک دائرہ کے وتر اب کا عمودی منصف قوس سے ج پر ملتا ہے اور

قوس اج با پر کوئی نقطہ د ہے، ثابت کرو کہ اج ا = اد × دب + د ج ا

اس کی مدد سے حاصل کرو کہ اد × دب بڑے سے بڑا ہوگا اگر نقطہ د نقطہ ج پر منطبق ہو۔

(۱۲) اب ج د ایک مشترک محیط ذواربعتہ الاضلاع ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{اب \times اد + دب \times ج د}{ب ا \times ج د + د ا \times ج ب} = \frac{اج}{ب د}$$

(۱۳) اب ج د ایک مشترک محیط ذواربعتہ الاضلاع ہے

اس کے حائط دائرہ پر کے کسی نقطہ ن سے اب، ب ج، ج د، د ا پر عمود

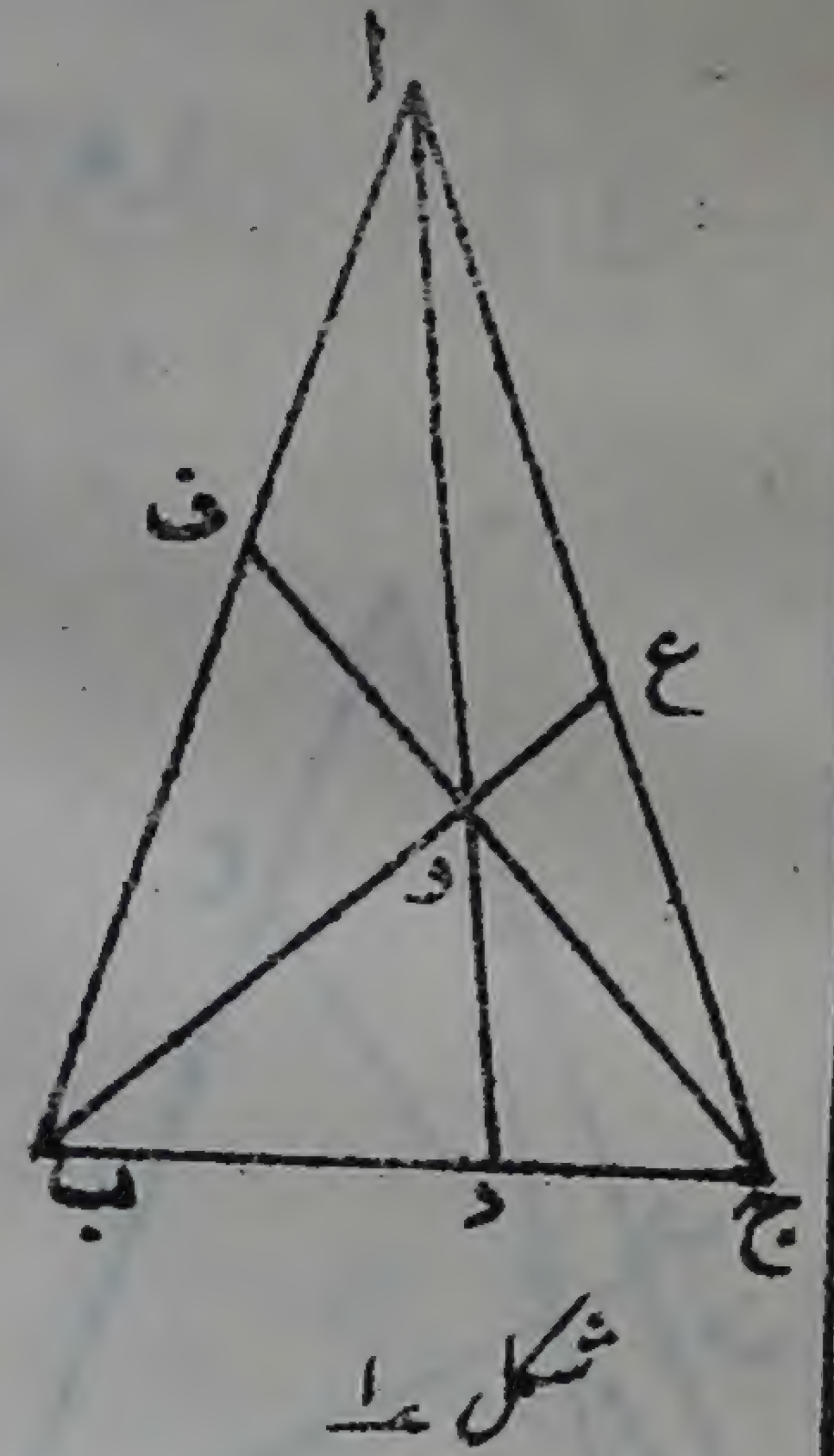
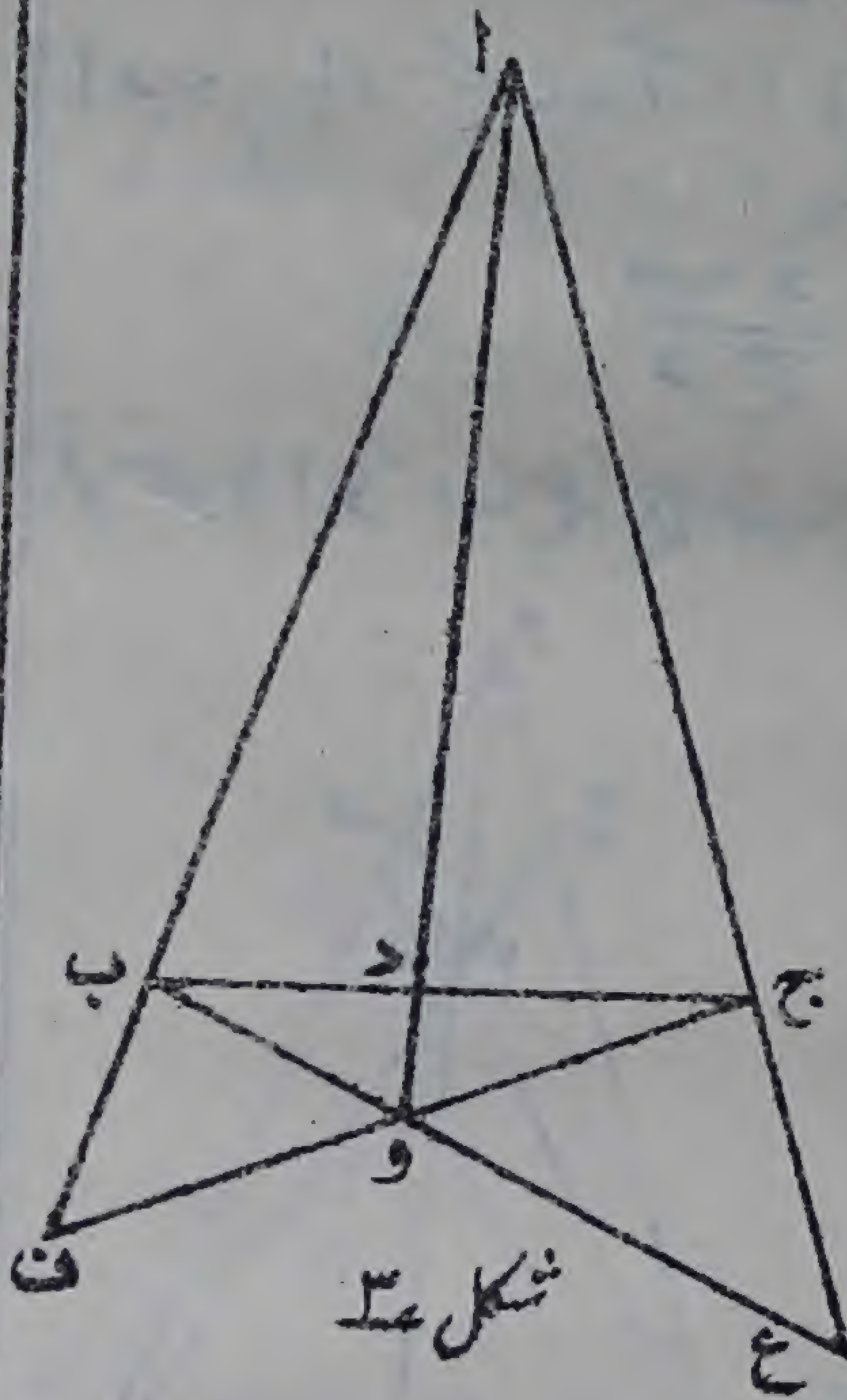
نکالے گئے ہیں جن کے طول بالترتیب ع، ع، ع، ع ہیں اور اسی نقطہ ن سے

وتروں اج، ب د پر کے عمودوں کے طول بالترتیب ع، ع، ع، ع ہیں

ثابت کرو کہ ع ع = ع ع = ع ع = ع ع

۴۵ مسئلہ - اگر مثلث اب ج کے رؤسوں ا، ب، ج میں سے گزرنے والے متراکز خط مقابل کے اضلاع سے بالترتیب نقاط د، ع، ف پر ملیں تو

$$\frac{ب د}{د ج} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ا ف}{ف ب} = ۱ +$$



فرض کرو کہ ا، د، ب، ع، ج، ف کا نقطہ تراکز وہ ہے۔
اگر نقطہ و مثلث کے اندر ہو [دیکھو شکل (۱)] تو تینوں نسبتیں

$$\frac{ب د}{د ج} ، \frac{ج ع}{ع ا} ، \frac{ا ف}{ف ب} \text{ مثبت ہیں۔}$$

اگر نقطہ و مثلث کے باہر ہو [دیکھو اشکال (۲) اور (۳)] تو مندرجہ بالا نسبتوں میں سے صرف ایک مثبت ہوگی اور باقی دو منفی۔
پس ہر صورت میں مندرجہ بالا تینوں نسبتوں کا حاصل ضرب مثبت ہوگا۔

$$\frac{ب د}{د ج} = \frac{ا ب د}{ا د ج} = \frac{ا ب د}{ا د ج} = \frac{ا ب د}{ا د ج} \text{ [موجب دفعہ ۱۳ (ب)]}$$

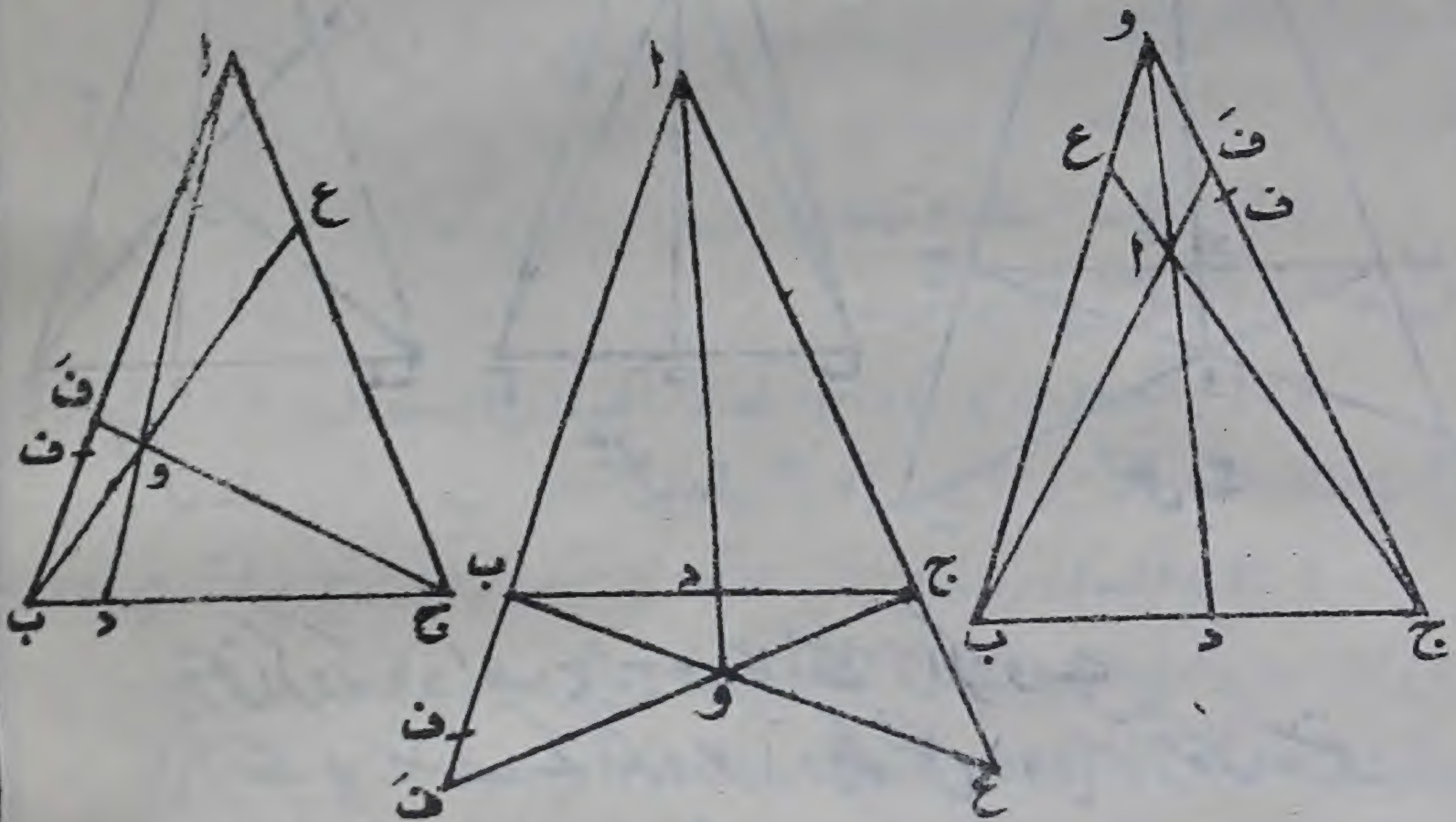
$$\text{اسی طرح سے } \frac{ج ع}{ع ا} = \frac{ب و ج}{ا ب و ج} \text{ اور } \frac{ا ف}{ف ب} = \frac{ج و ا}{ج و ب}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ا ع}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\Delta \text{اوب}}{\Delta \text{اوج}} \times \frac{\Delta \text{ب و ج}}{\Delta \text{ب و د}} \times \frac{\Delta \text{ج و ا}}{\Delta \text{ج و ب}}$$

اس مسئلہ کا عکس :- اگر مشکت ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب پر بالترتیب نقاط د، ع، ف اس طرح واقع ہوں کہ

$$1 + = \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ا ع}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}}$$

تو خطوط ا د، ب ع، ج ف متراکز ہونگے۔



فرض کرو کہ ا د اور ب ع کا نقطہ تقاطع و ہے نیز فرض کرو کہ ج و ضلع ا ب سے ف پر ملتا ہے۔

چونکہ ا د، ب ع، ج ف متراکز خط ہیں

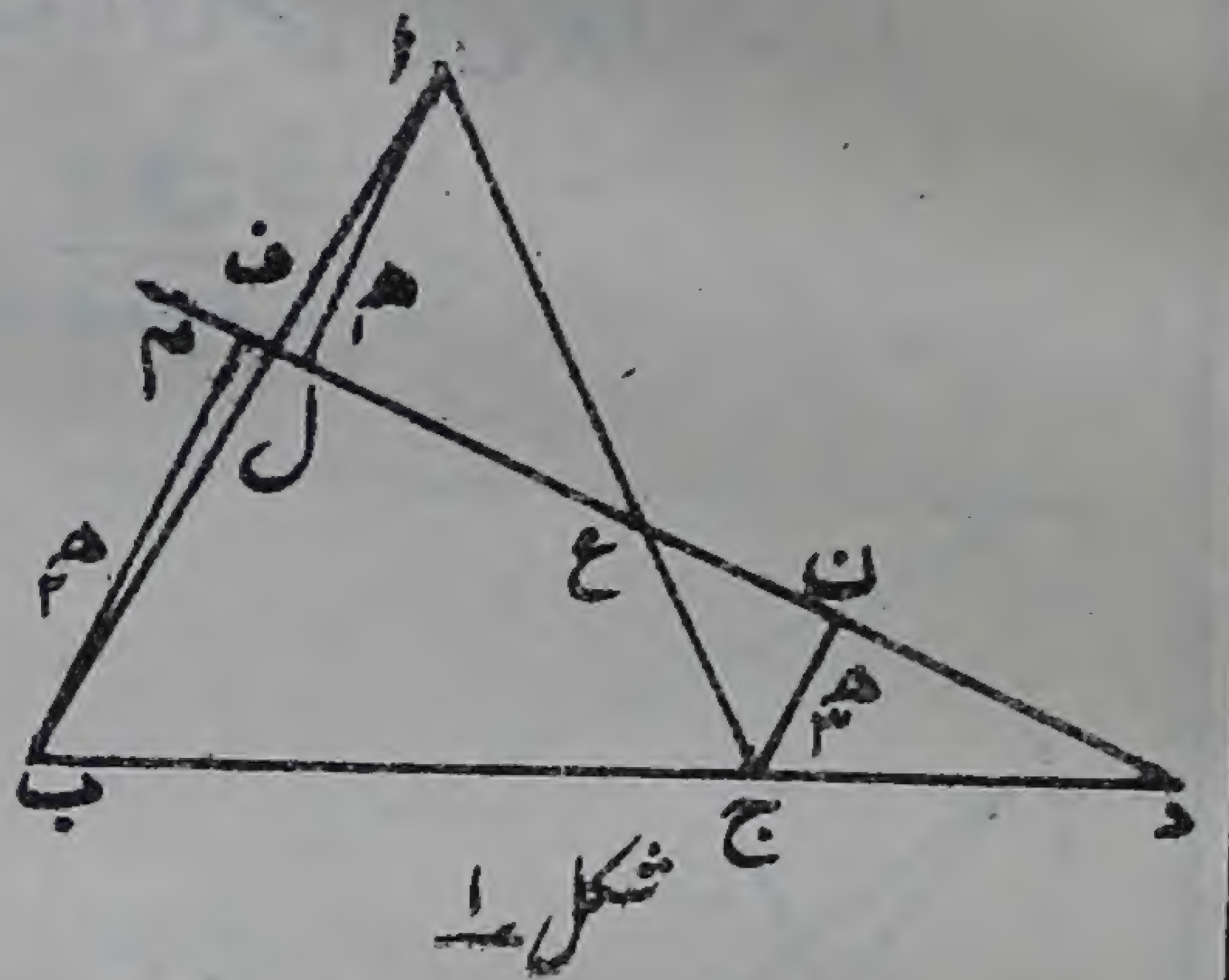
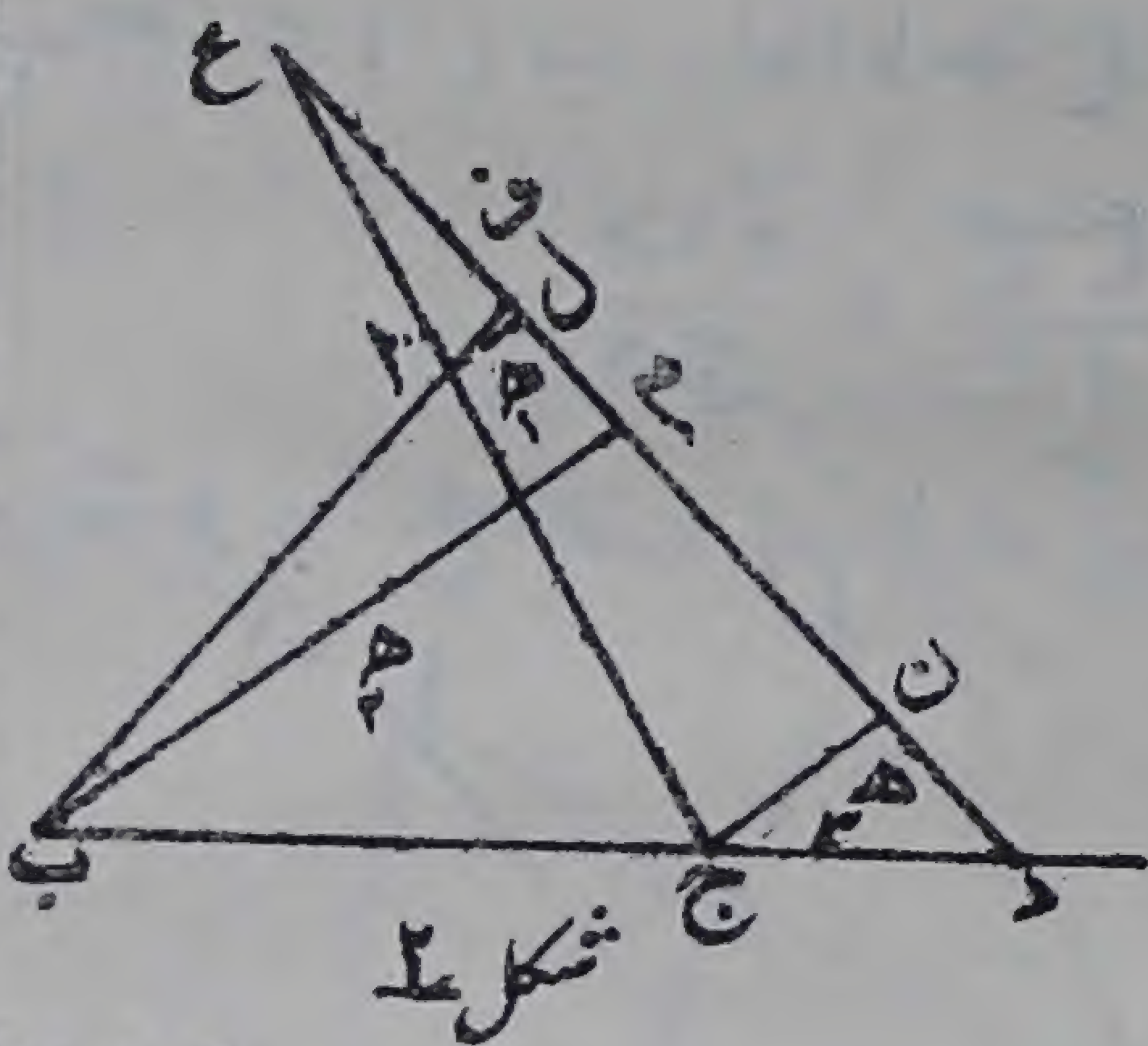
$$\text{اس لیے } \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ا ع}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = 1 +$$

لیکن بموجب مفروض $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ا ع}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = 1 +$

اس لیے $\frac{اف}{فب} = \frac{اف}{فب}$ (بلحاظ مقدار اور علامت کے)

اس لیے نقطہ ف نقطہ ف پر منطبق ہے ۔
پس ثابت ہوا کہ خطوط ا د ، ب ع ، ج ف متراکز ہیں ۔
نوٹ ۔ اس مسئلہ کو کلیوا (Ceva) کا مسئلہ کہتے ہیں ۔
۴۶۔ مسئلہ ۔ اگر ایک خط مستقیم ا ب ج کے اضلاع
ب ج ، ج ا ، ا ب کو بالترتیب نقاط د ، ع ، ف پر قطع کرے تو

$$\frac{ب د}{د ج} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ا ف}{ف ب} = ۱ -$$



قاطع مثلث کے دو ضلعوں کو داخلاً اور ایک ضلع کو خارجاً قطع کریگا [دیکھو شکل ۱]
یا تینوں ضلعوں کو خارجاً قطع کریگا [دیکھو شکل (۲)]

اس لیے تین نسبتوں $\frac{ب د}{د ج}$ ، $\frac{ج ع}{ع ا}$ ، $\frac{ا ف}{ف ب}$ میں سے دو مثبت

اور ایک منفی ہوگی یا تینوں منفی ہوں گی ۔

اس لیے ہر صورت میں ان نسبتوں کا حاصل ضرب منفی ہوگا ۔ اب نقاط ا ب ج سے قاطع پر بالترتیب عمود ال ب م ، ج ن ، ا ل کو ا ل ، ب م ، ج ن نکالو ۔ اور فرض کرو کہ ان کے طول بالترتیب $ہم$ ، $ہم$ ، $ہم$ ہیں ۔

متشابه مثلثات سے بلا لحاظ علامت کے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ب د}{د ج} = \frac{۱ ہ ۲}{۲ ہ ۱} ، \frac{ج ع}{ع ا} = \frac{۲ ہ ۱}{۱ ہ ۲} اور \frac{ا ف}{ف ب} = \frac{۱ ہ ۲}{۲ ہ ۱}$$

اس لیے صرف عددی قیمت کو ملحوظ رکھنے سے

$$۱ = \frac{ب د}{د ج} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ا ف}{ف ب} = \frac{۱ ہ ۲}{۲ ہ ۱} \times \frac{۲ ہ ۱}{۱ ہ ۲} \times \frac{۱ ہ ۲}{۲ ہ ۱}$$

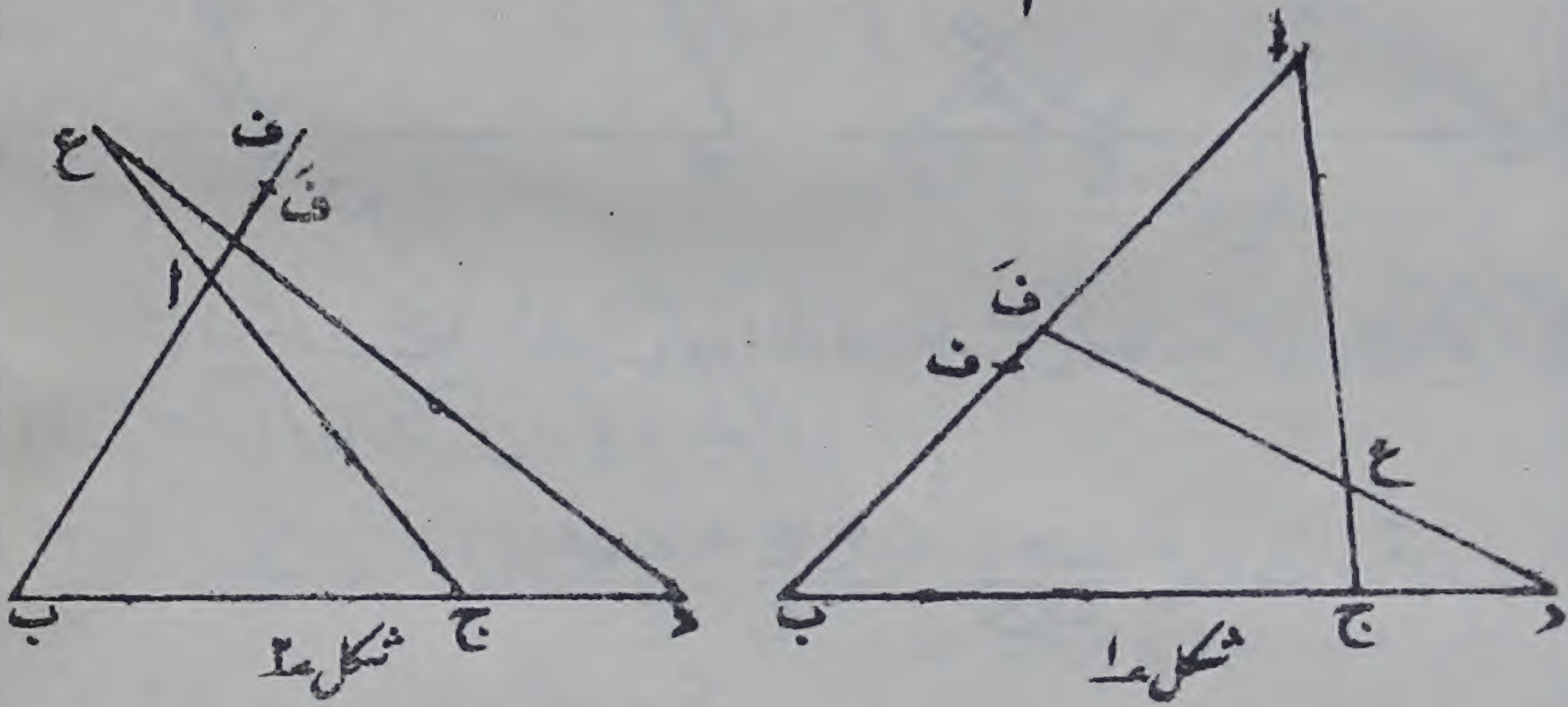
چونکہ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اس حاصل ضرب کی علامت منفی ہے

$$۱ = - \frac{ب د}{د ج} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ا ف}{ف ب}$$

اس مسئلہ کا عکس :- اگر ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب پر نقاط د، ع، ف اس طرح واقع ہوں کہ

$$۱ = - \frac{ب د}{د ج} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ا ف}{ف ب}$$

تو نقاط د، ع، ف ہم خط ہوں گے۔



فرض کرو کہ د ع ضلع ا ب سے پر ملتا ہے
چونکہ نقاط د، ع، ف ہم خط ہیں

$$۱ = - \frac{ب د}{د ج} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ا ف}{ف ب}$$

لیکن بموجب مفروض $\frac{ب}{د} \times \frac{ج}{ع} \times \frac{ا}{ف} = ۱$

اس لیے $\frac{ا}{ف} = \frac{ا}{ف}$ (بمحاط مقدار اور علامت کے)

اس لیے نقطہ ف نقطہ ف پر منطبق ہے۔

پس ثابت ہوا کہ نقاط د، ع، ف ہم خط ہیں۔

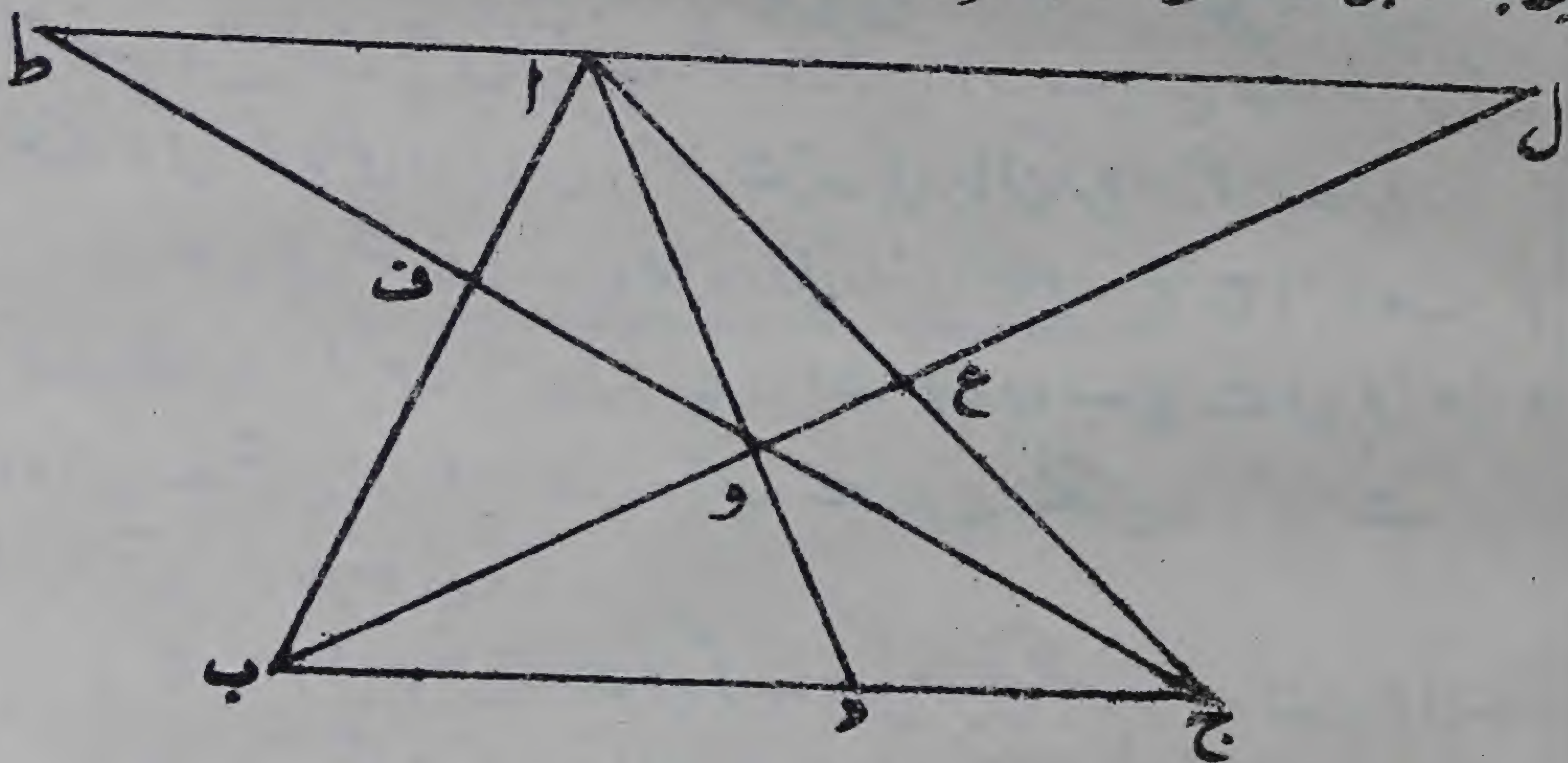
نوٹ :- اس مسئلہ کو مینی لاس (Menelaus) کا مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ ۱۲

(۱) کیوں کہ مسئلہ کا متبادل ثبوت :-

مثلث ا ب ج کے رأسوں سے متراکز خطوط ا و، ب و، ج و کھینچے گئے

ہیں جو مقابل کے اضلاع سے بالترتیب نقاط د، ع، ف پر ملتے ہیں اور



امیں سے گزرنے والے اور ب ج کے متوازی خط سے ب ع اور ج ف

بالترتیب ل اور ط پر ملتے ہیں۔

متشابہ مثلثوں کی مدد سے $\frac{ا}{ف} = \frac{ا}{ف}$

$$\frac{ب}{د} = \frac{ب}{د} \times \frac{د}{و} \times \frac{و}{ا} = \frac{د}{و} \times \frac{ا}{ا} = \frac{د}{و}$$

اور

$$\text{اور } \frac{ج ع}{ا ع} = \frac{ب ج}{ا ل}$$

$$\text{اس لیے } \frac{ا ف}{ب ف} \times \frac{ب د}{ج د} \times \frac{ج ع}{ا ع} = \frac{ط ا}{ب ج} \times \frac{ا ل}{ط ا} \times \frac{ب ج}{ا ل} = 1$$

(۲) کیوا (Ceva) کے مسئلہ کی رُو سے ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

(ا) خطوط وسطی متراکز ہوتے ہیں۔

(ب) رأسوں سے مقابل کے اضلاع پر کے عمود متراکز ہوتے ہیں۔

(ج) اضلاع کے عمودی منصف متراکز ہوتے ہیں۔

(د) زاویوں کے اندرونی منصف متراکز ہوتے ہیں۔

(ع) دو زاویوں کے خارجی منصف اور تیسرے کا داخلی منصف

مستراکز ہوتے ہیں۔

(۳) مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب

کو بالترتیب د، ع، ف پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا د، ب ع، ج ف متراکز ہیں۔
اس مسئلہ کا مماثل مسئلہ جانبی دائروں کی صورت میں بھی بیان کرو اور ثابت کرو۔

(۴) ایک مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو

بالترتیب نقاط د، ع، ف پر مس کرتا ہے۔ ع ف محدودہ ب ج سے ن پر، ف د
محدودہ ج ا سے ق پر اور د ع محدودہ ا ب سے س پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ
نقاط ن، ق، س ہم خط ہیں۔

(۵) سوال ۴ میں ثابت کرو کہ ب ج کی موسیقی تقسیم د اور ن پر ہوتی ہے۔

(۶) ایک مثلث کے دو زاویوں کے اندرونی منصف اور تیسرے کا خارجی منصف

مقابل کے اضلاع سے ہم خط نقطوں پر ملتے ہیں۔

(۷) ثابت کرو کہ مثلث کے زاویوں کے خارجی ناصف مقابل کے اضلاع سے

جن تین نقطوں پر ملتے ہیں وہ نقطے ہم خط ہیں۔

(۸) مثلث ا ب ج کے رأسوں ا، ب، ج پر حائط دائرہ کے مماس کھینچے

گئے ہیں اور وہ مقابل کے اضلاع سے بالترتیب ل، م، ن پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ

نقاط ل' م' ن ہم خط ہیں۔ [اشارہ۔ $\frac{ب ل}{ج ل} = \frac{ب ج}{ج ا}$]

(۹) مثلث ا ب ج کے اندر ایک نقطہ و ہے۔ ثابت کرو کہ زاویوں ا و ب، ب و ج، ج و ا کے خارجی منصف بالترتیب اضلاع ا ب، ب ج، ج ا کے تین ہم خط نقطوں پر ملتے ہیں۔

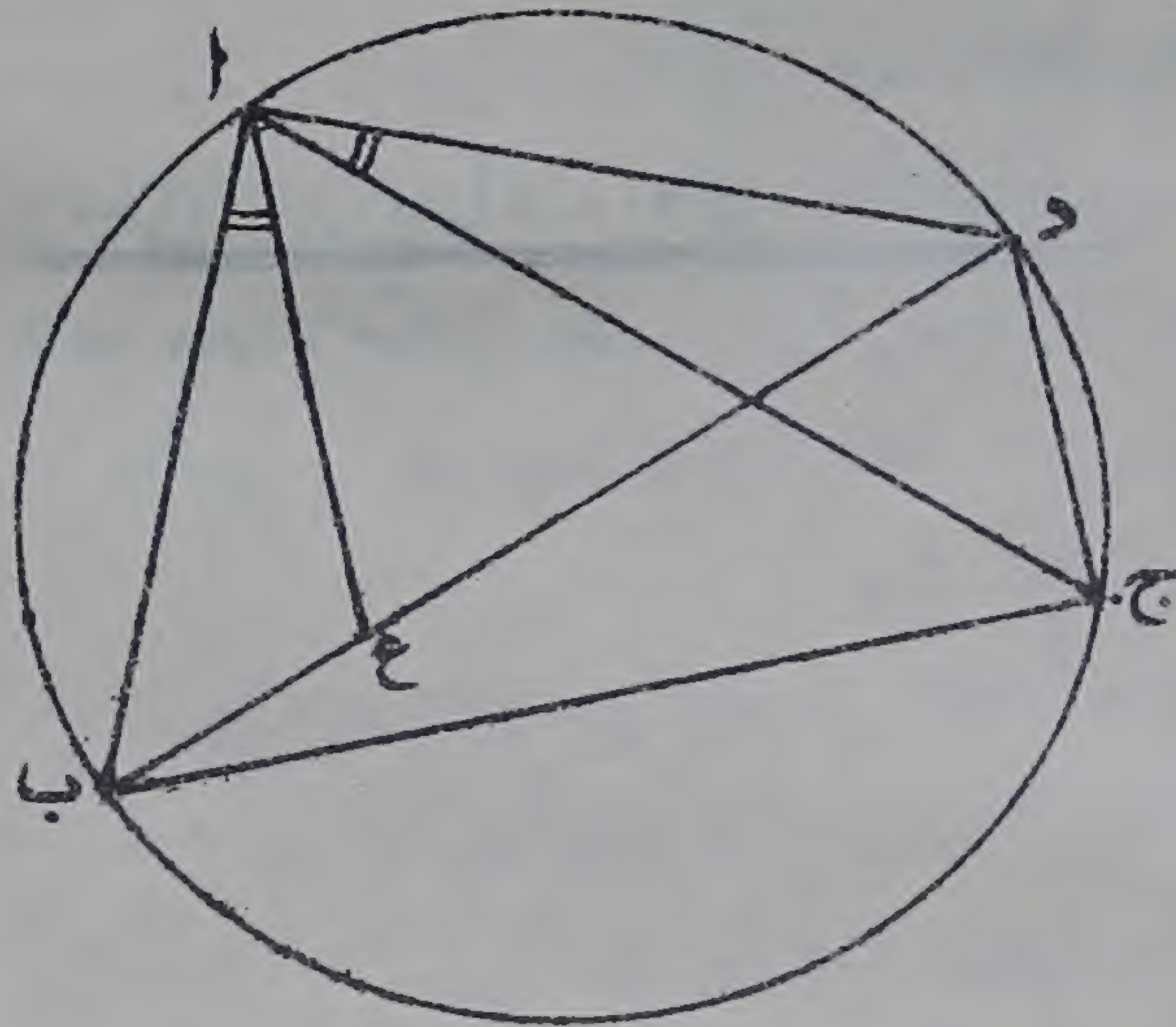
(۱۰) تین متراکز خط ا د، ب ع، ج ف مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب سے بالترتیب د' ع' ف پر ملتے ہیں اور ع' ف' د' د' ع' بالترتیب ب ج، ج ا، ا ب سے لا' ما' مے پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط لا' ما' مے ہم خط ہیں نیز ثابت کرو کہ ب د ج لا ایک موسیقی صف ہے۔

(۱۱) مثلث ا ب ج کے اندر کوئی نقطہ و ہے۔ ثابت کرو کہ جب و ب ج x جب و ج ا x جب و ا ب = جب و ج ب x جب و ب ا x جب و ا ج اس نتیجہ کا عکس بیان کرو اور اس کو بھی ثابت کرو۔

چوتھا باب

دائرہوں کے خواص

۷۴ مسئلہ۔ مشترک المحيط ذواربۃ الاضلاع (چار ضلعی) کے وتروں کا حاصل ضرب متقابل کے اضلاع کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔



ا ب ج د ایک مشترک المحيط ذواربۃ الاضلاع ہے، ثابت کرنا ہے کہ
 $ا ج \times ب د = ا ب \times ج د + ا د \times ب ج$
 ج ا د کے مساوی ب ا ع بناؤ۔

فرض کرو کہ ا ع ب د سے ع پر ملتا ہے

مثلثات ب ا ع اور ج ا د میں

$$\text{ب ا ع} = \text{ج ا د}$$

$$\text{اور } \text{ا ب ع} = \text{ا ج د}$$

اس لیے مثلثات ب ا ع اور ج ا د متشابه ہیں۔

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ب ع}}{\text{ج د}}$$

یعنی ا ب × ج د = ا ج × ب ع (۱)

نیز مثلثات ب ا ج اور ع ا د میں

$$\text{ب ا ج} = \text{ع ا د}$$

$$\text{اور } \text{ب ج ا} = \text{ع د ا}$$

اس لیے مثلثات ب ا ج اور ع ا د متشابه ہیں۔

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ب ج}}{\text{ع د}} = \frac{\text{ا ج}}{\text{ا د}}$$

یعنی ا د × ب ج = ا ج × ع د (۲)

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ا ب} \times \text{ج د} + \text{ا د} \times \text{ب ج} = \text{ا ج} \times \text{ب ع} + \text{ا ج} \times \text{ع د}$$

$$= \text{ا ج} (\text{ب ع} + \text{ع د})$$

$$= \text{ا ج} \times \text{د ب}$$

نوٹ۔ اس مسئلہ کو بطليموس (Ptolemy) کا مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ ۱۳

(۱) مثلث ا ب ج میں ا ب = ا ج کا قاعدہ ب ج کے سروں

ب اور ج سے خطوط ب د اور ج د کھینچ گئے ہیں جو بالترتیب ب ا اور ج ا

پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$بج \times اد = اء \times ب$$

(۲) مثلث مساوی الاضلاع ابج کے حائط وائرہ کی قوس صغیر بج پر کوئی نقطہ ن ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ن ب + ن ج = ن ا$$

(۳) مثلث ابج میں اب = اج، اس مثلث کے حائط وائرہ کی قوس بج پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ (ن ب + ن ج) : ن ا ایک منتقل مقدار ہے۔ نیز بتاؤ کہ ن کے کس مقام کے جواب میں ن ب + ن ج کی قیمت بڑی سے بڑی ہے۔

(۴) مربع ابج د کے حائط وائرہ کی قوس صغیر اب پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$(ن ا + ن ج) : (ن ب + ن د) = ن د : ن ج$$

(۵) منظم سدس ابج د ع ف کے حائط وائرہ کی قوس صغیر اب پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ن ا + ن ب + ن ج + ن ف = ن د + ن ع$$

(۶) بطليموس کے مسئلہ کی مدد سے زاویوں ع اور ہ کی حادہ قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

$$جب (ع + ہ) = جب ع جم ہ + جم ع جب ہ$$

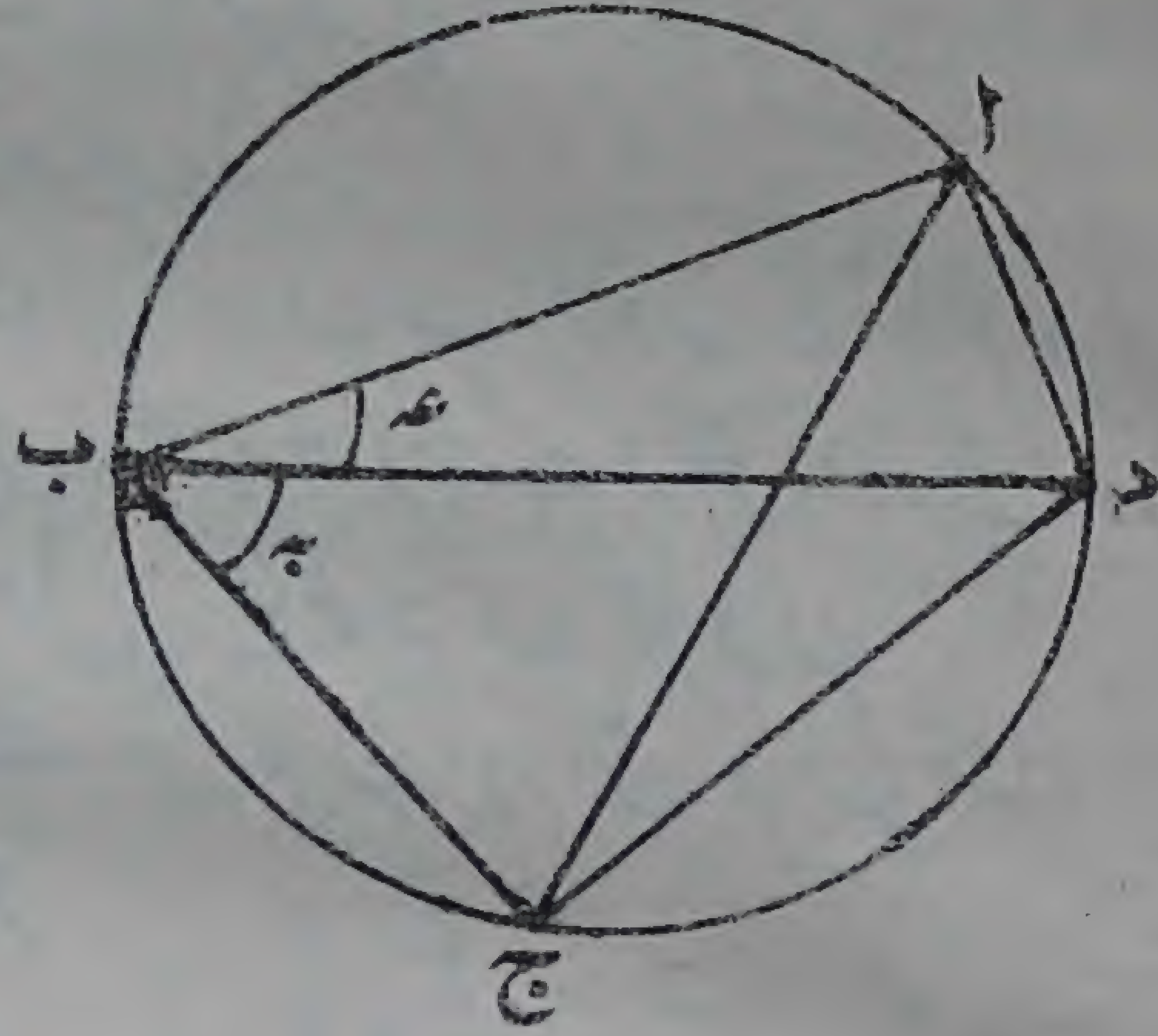
اکافی طول کے خط ب د کے قطر پر ایک وائرہ بناؤ۔ ب د کی مخالف سمتوں میں زاویے د ب ا اور د ب ج بالترتیب ع اور ہ کے مساوی بناؤ (دیکھو شکل صفحہ ۷۹)۔
اج کو ملاؤ۔

بطليموس کے مسئلہ کی رُو سے اب \times ج د + اد + بج = اج \times ب د

یعنی جم ع جب ہ + جب ع جم ہ = اج (کیونکہ ب د = ا)

لیکن مثلث ابج میں $\frac{اج}{جب (ع + ہ)} =$ مثلث کے حائط وائرہ کا قطر ب د = ا

۷۔ اج = جب (ع + ب)



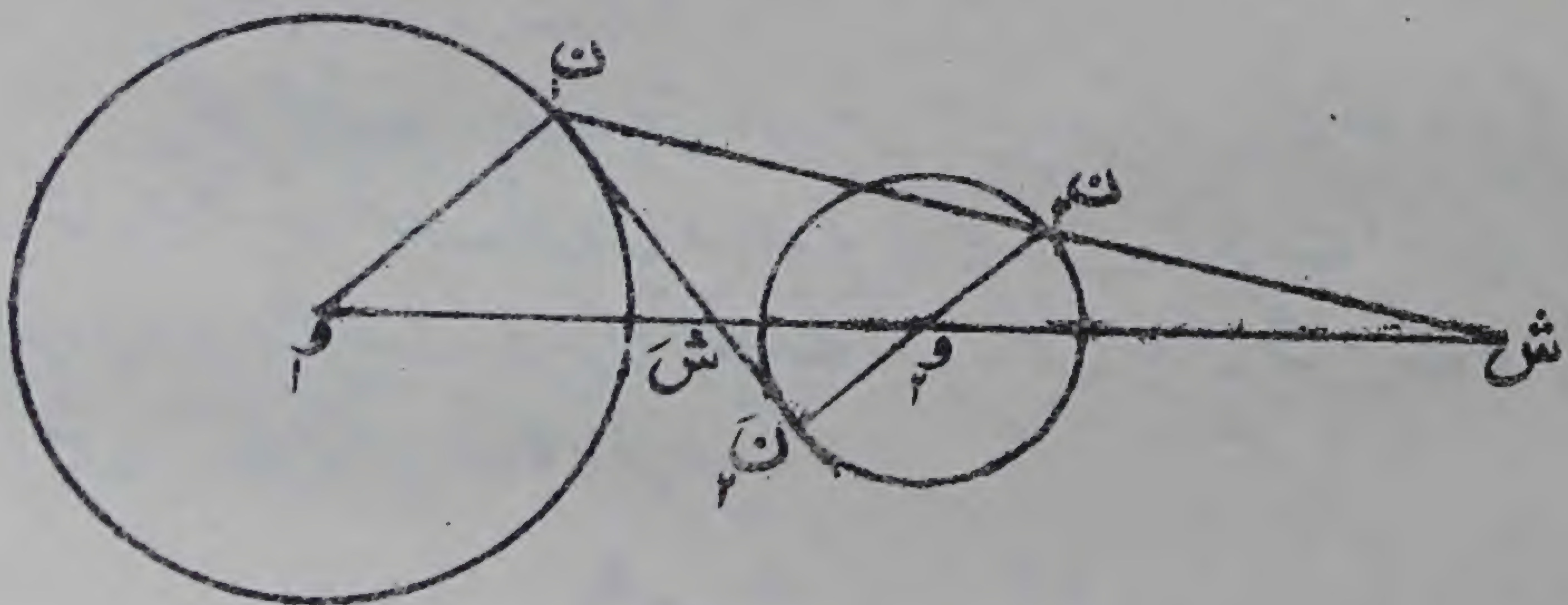
پس ثابت ہوا کہ جب ع جم ب + جم ع جب ب = جب (ع + ب) (۷)
(۷) مندرجہ بالا سوال کے طریقہ سے مناسب شکلیں کھینچ کر ثابت کرو کہ

(ا) جب (ع - ب) = جب ع جم ب - جم ع جب ب

(ب) جم (ع + ب) = جم ع جم ب - جب ع جب ب

(ج) جم (ع - ب) = جم ع جم ب + جب ع جب ب

(۸) اگر دو دائروں میں کوئی دو متوازی نصف قطر (ہر دائرہ میں ایک) کھینچے جائیں تو ان کے سروں کو ملائے والا خط مستقیم مرکزوں کے خط کو دو ثابت نقطوں میں سے کسی ایک نہ ایک پر قطع کرتا ہے۔



فرض کرو کہ (و) اور (و) دو وسیع ہوئے دائرے ہیں۔

جن کے نصف قطر بالترتیب ۱ اور ۲ ہیں۔ ان میں دو نصف قطر (۱) و (۲) اور
 و (۳) ایک ہی سمت میں متوازی اور (۲) و (۳) اور و (۳) مخالف سمتوں میں
 متوازی کھینچے گئے ہیں۔

خطوط (۱) و (۲) اور (۳) مرکزوں کے خط و کو بالترتیب نقاط (۱) اور
 (۲) پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ (۱) اور (۲) دو ثابت نقطے ہیں۔

حصہ اول۔ چونکہ و (۱) // و (۲)

اس لیے مثلثات (۱) و (۲) اور (۲) و (۳) متشابه ہیں۔

اس لیے $\frac{ش و}{ش و} = \frac{و (۱)}{و (۲)} = \frac{ر (۱)}{ر (۲)}$ جو ایک مستقل مقدار ہے۔

یعنی مرکزوں کے خط و کی خارجی تقسیم ۱: ۲ کی نسبت میں نقطہ (۱) پر
 ہوتی ہے اس لیے (۱) ایک ثابت نقطہ ہے۔

حصہ دوم۔ چونکہ و (۱) // و (۲)

اس لیے مثلثات (۱) و (۲) اور (۲) و (۳) متشابه ہیں۔

اس لیے $\frac{ش و}{ش و} = \frac{و (۱)}{و (۲)} = \frac{ر (۱)}{ر (۲)}$ جو ایک مستقل مقدار ہے۔

یعنی مرکزوں کے خط و کی داخلی تقسیم ۱: ۲ کی نسبت میں نقطہ (۱) پر
 ہوتی ہے۔ اس لیے (۱) ایک ثابت نقطہ ہے۔
 پس مسئلہ ثابت ہوا۔

تعریف۔ نقاط (۱) اور (۲) جن پر مرکزوں کے خط و کی داخلی
 اور خارجی تقسیم نصف قطروں ۱ اور ۲ کی نسبت میں ہوتی ہے، وہی ہوئے
 دائروں کے مشابہت کے مرکز کہلاتے ہیں۔ (۱) و (۲) بھی مشابہت کا مرکز ہے
 اور (۳) آڑی مشابہت کا مرکز۔

مسئلہ ۱۴

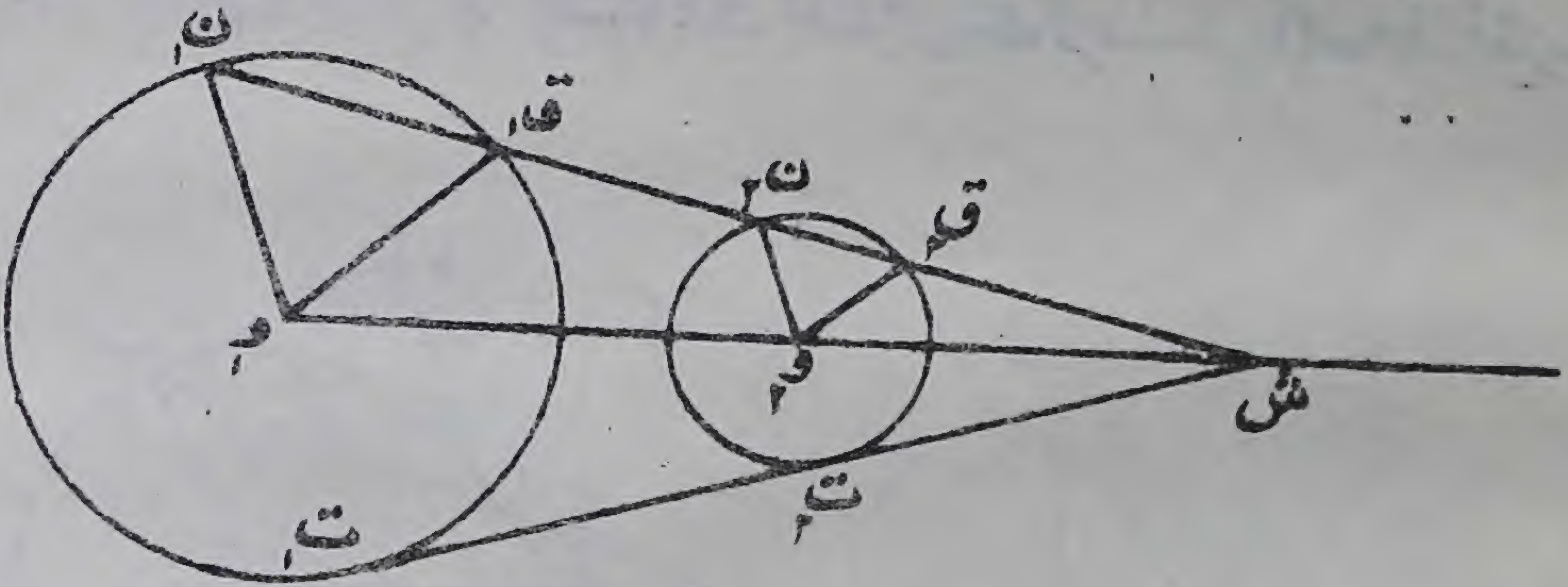
(۱) دائروں (۱) اور (۲) کے نصف قطرہ ۱ اور ۲ ہیں اور

۱۱۔ ۴۔ ان دائروں کی مشابہت کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ محسوب کرو۔
[جواب - ۳]

(۲) ثابت کرو کہ دائروں (۱) اور (۲) کے راست مشترک مماسات کا نقطہ تقاطع سیدھی مشابہت کے مرکز مش پر اور متقاطع مشترک مماسات کا نقطہ تقاطع آڑی مشابہت کے مرکز مش پر ہے۔

(۳) ایک متغیر دائرہ (ج) دو دیے ہوئے دائروں (۱) اور (۲) کو نقاط اور ق پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم ق دیے ہوئے دائروں کے ایک نہ ایک مشابہت کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ مختلف صورتوں میں اختیار کرو۔

(۴) دو دیے ہوئے دائروں (۱) اور (۲) کی سیدھی مشابہت کے مرکز مش میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو دائرہ (۲) کو نقاط اور ق پر اور دائرہ (۱) کو نقاط اور ق پر قطع کرتا ہے (دیکھو شکل)



ثابت کرو کہ $O_1 N$ متوازی ہے $O_2 P$ اور $O_1 Q$ متوازی ہے $O_2 P$ کے۔
(۵) شکل بالا میں ثابت کرو کہ

$SN \times SQ = ST \times ST' = SP \times SQ = ST \times ST'$
جہاں T اور T' دیے ہوئے دائروں کے ایک راست مشترک مماس کے نقاط تماس ہیں۔

(۶) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے مائٹا اور نو فسطی دائروں کی مشابہت کے

مرکز مثلث کے عمودی مرکز اور ہندسی مرکز ہیں۔

(۷) ثابت کرو کہ دو مساوی دائروں کی سیدھی مشابہت کا مرکز لائنائی

پر ہے۔

(۸) (۱) (۲) (۳) اور (۴) تین دیے ہوئے دائرے ہیں جن کے مرکز

ہم خط نہیں ہیں۔ دائروں (۱) اور (۲) کی سیدھی اور آڑی مشابہت کے مرکز

بالترتیب $ش$ اور $ش$ ہیں۔ اور دائروں (۲) اور (۳) کی سیدھی اور آڑی

مشابہت کے مرکز بالترتیب $ش$ اور $ش$ ہیں اور دائروں (۳) اور (۴) کی سیدھی

اور آڑی مشابہت کے مرکز بالترتیب $ش$ اور $ش$ ہیں۔ ثابت کرو کہ

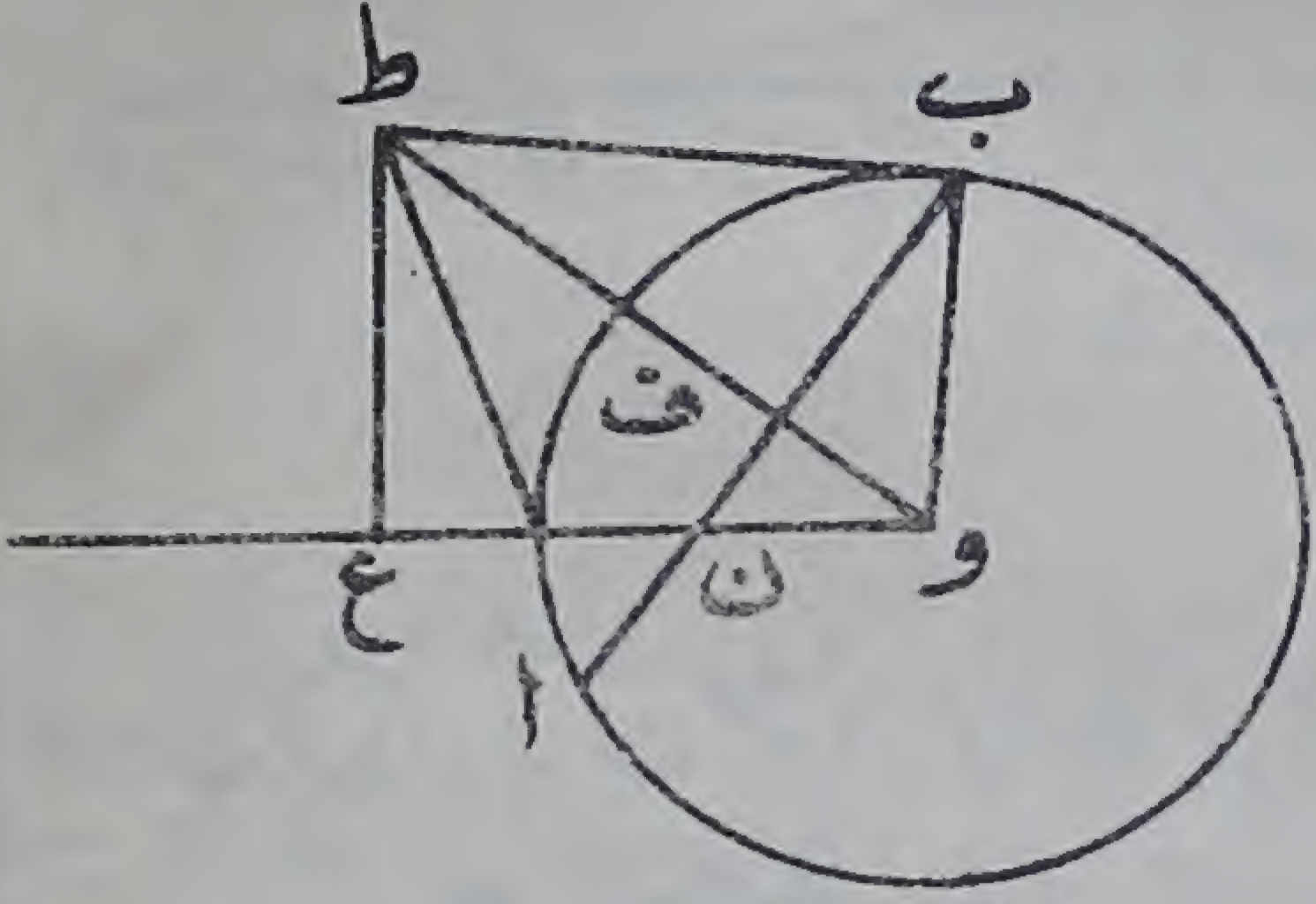
(۱) $ش$ ، $ش$ ، اور $ش$ متراکز ہیں

(۲) چھ نقطوں $ش$ ، $ش$ ، $ش$ ، $ش$ ، $ش$ ، $ش$ میں سے ایسے

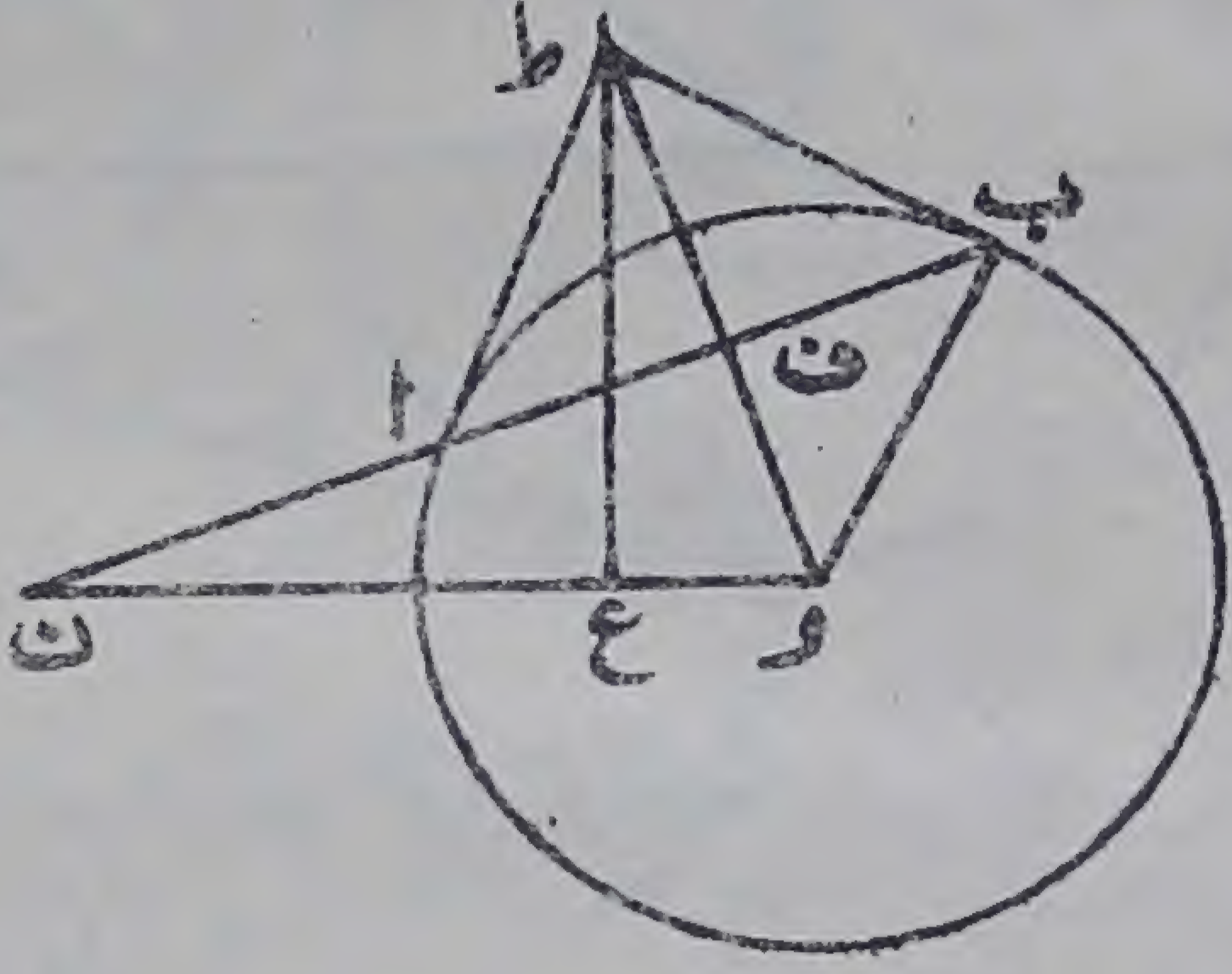
تین تین نقطوں کے چار جٹ ہیں جو ہم خط ہیں۔

۴۹۔ ایک دائرے کے اُن وتروں کے سرور پر کے محاسوں کے

نقطہ تقاطع کا طریق جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں ایک خط مستقیم ہے۔



شکل ۲



شکل ۱

فرض کرو کہ دائرہ (و) کی سطح میں ایک ثابت نقطہ ہے۔ ن میں

گزرنے والا کوئی خط دائرہ (و) سے نقاط ۱ اور ۲ پر ملتا ہے اور ۱ اور ۲ کے

ماسات کا نقطہ تقاطع ط ہے۔ ثابت کرنا ہے کہ ط کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔
 ون کو ملاؤ اور ط سے ون پر عمود ط ع نکالو
 فرض کرو کہ و ط اور ا ب کا نقطہ تقاطع ف ہے،
 و ب کو ملاؤ۔

چونکہ ف اور ع پر کے زاویے قائم ہیں
 اس لیے نقاط ف، ع، ن، ط مشترک المیہ ہیں۔
 اس لیے ون \times و ع = و ط \times و ف = و ب \times جو ایک متقل مقدار ہے۔
 اب چونکہ و اور ن ثابت نقطے ہیں اس لیے ع بھی ایک ثابت نقطہ ہے
 اور نقطہ ن میں سے گزرنے والے کسی وتر ا ب کے سروں پر گئے ماسوں کا نقطہ
 تقاطع ط ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہے جو ثابت نقطہ ع میں سے گزرتا
 ہے اور ون پر عمود وار ہے۔ انہیں مسئلہ ثابت ہوا۔

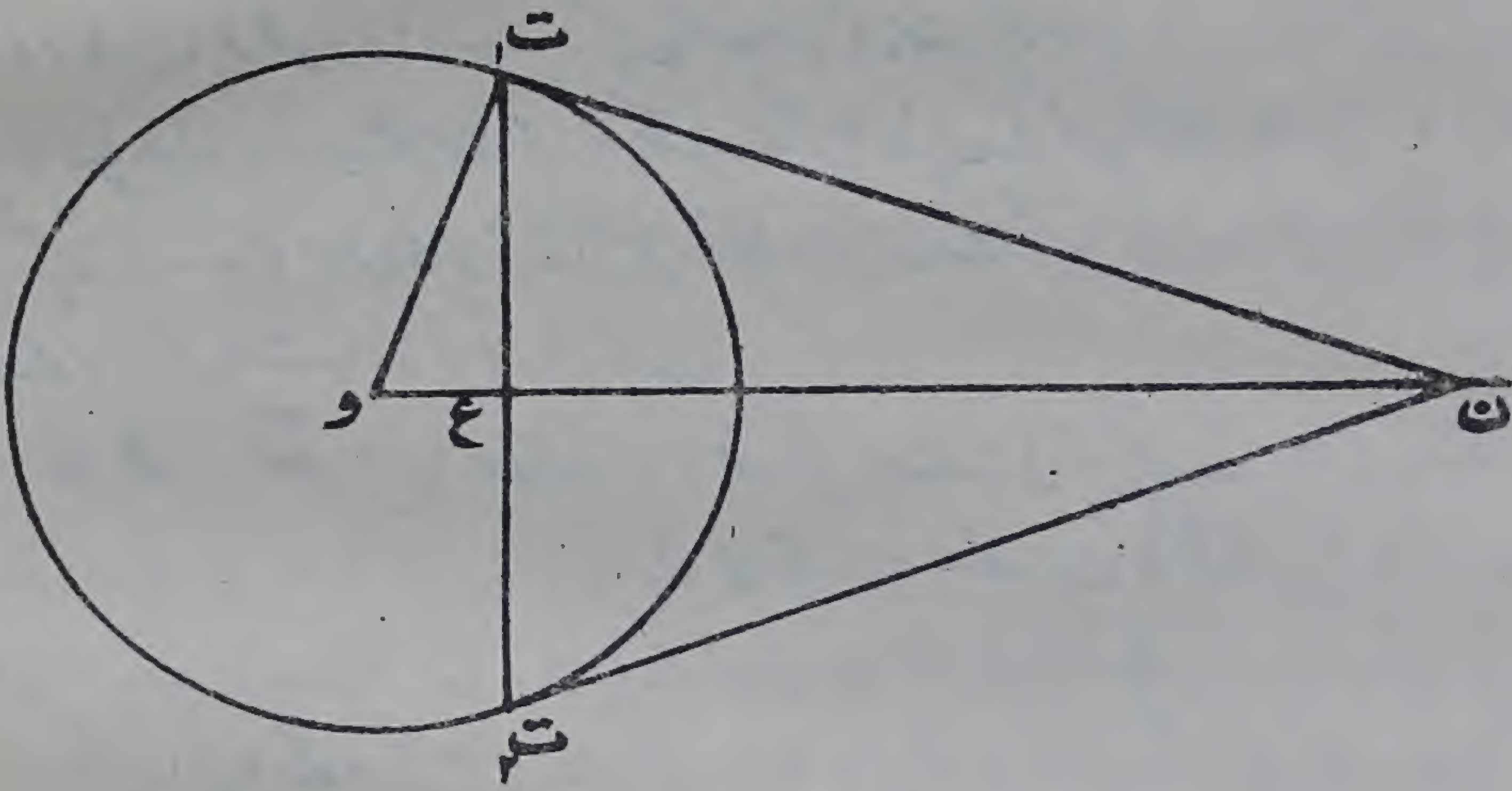
نوٹ :- یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ع ط پر کے کسی نقطہ سے دائرہ (و)
 تک کھینچے ہوئے ماسوں کا وتر تمامس نقطہ ن میں سے گزرتا ہے۔ پس خط ع ط
 طریق کے دونوں شرائط کو پورا کرتا ہے۔

۵۰۔ تعریفیات۔ دفعہ گزشتہ کی ترقیم کے مطابق نقطہ ط
 کا طریق دیے ہوئے دائرہ (و) کے لمحاظ سے نقطہ ن کا قطبی کہلاتا ہے اور
 نقطہ ن دیے ہوئے دائرہ (و) کے لمحاظ سے خط ع ط کا قطب کہلاتا ہے۔
 اگر دائرہ کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط پر مرکز کی ایک ہی جانب
 نقاط ن اور ن اس طرح لیے جائیں کہ ون \times ون = ر جہاں ر دائرہ
 (و) کا نصف قطر ہے تو نقاط ن، ن میں سے ہر ایک بلحاظ دائرہ (و) کے
 دوسرے نقطہ کا مقلوب کہلاتا ہے۔ مثلاً دفعہ گزشتہ کی شکل میں نقاط ن او
 ع بلحاظ دائرہ (و) کے ایک دوسرے کے مقلوب ہیں، پس حاصل ہو کہ بلحاظ
 دائرہ (و) کے نقطہ ن کا قطبی ایک خط مستقیم ہے جو ن کے مقلوب میں سے
 گزرتا ہے اور ون پر عمود وار ہے۔

۵۱۔ چونکہ ون \times ون = ر جہاں ر دائرہ (و) کا نصف قطر ہے

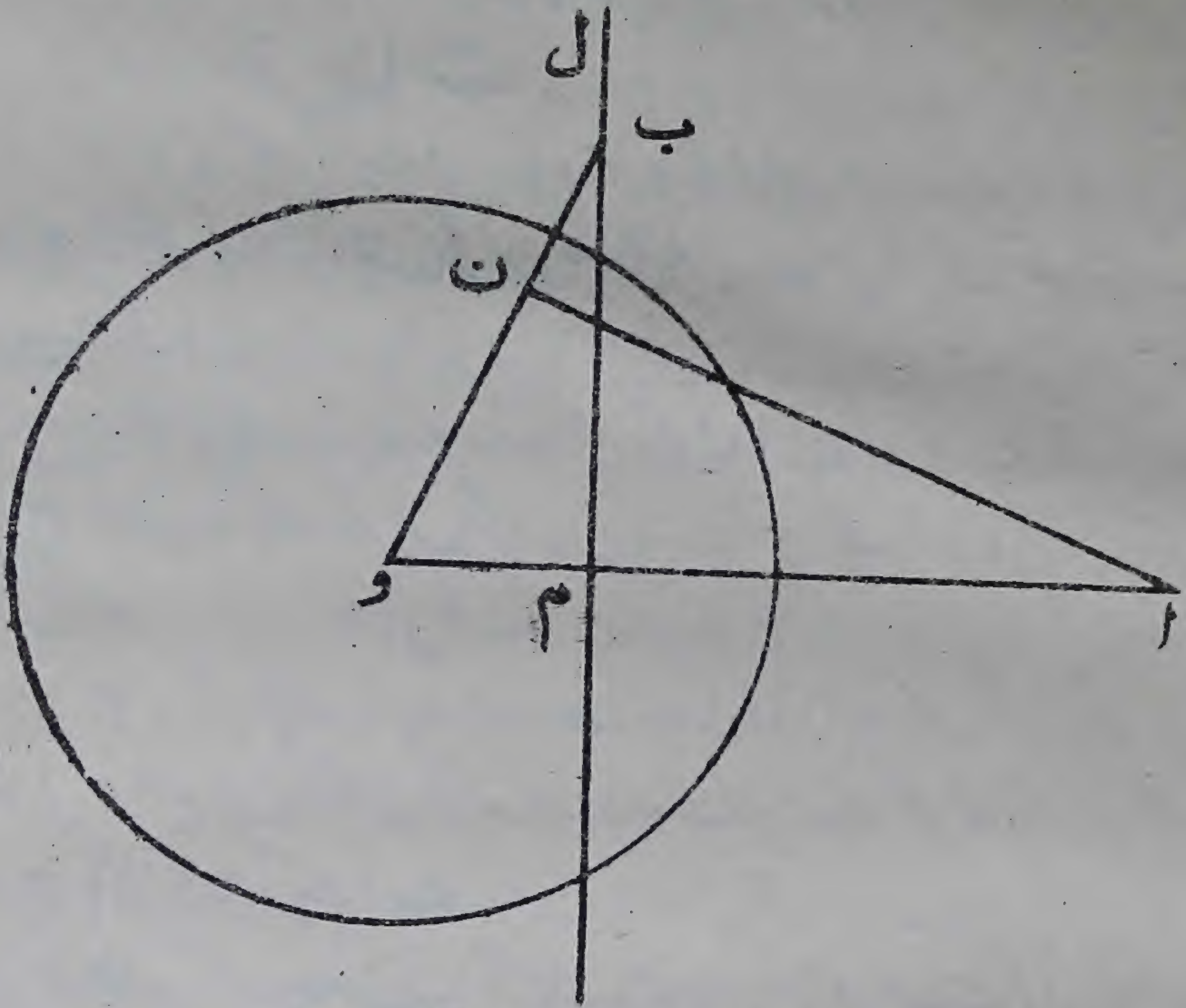
اس لیے و ع بڑا ہے، مساوی ہے، چھوٹا ہے و ن سے بموجب اس کے کہ و ن چھوٹا ہے یا مساوی ہے یا بڑا ہے نصف قطر ر سے پس حاصل ہوا کہ بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا قطبی دائرہ (و) کو قطع نہیں کرتا ہے، یا اس کرتا ہے، یا قطع کرتا ہے بموجب اس کے کہ نقطہ ن دائرہ کے اندر ہے، دائرہ پر ہے، یا دائرہ کے باہر ہے۔

۵۲۔ مسئلہ۔ اگر نقطہ ن دائرہ (و) کے باہر ہو تو ن کا قطبی ان مماسات کا وتر تماس ہے جو ن سے دائرہ (و) تک کھینچے جائیں۔
نقطہ ن سے دائرہ (و) کے مماسات ن ت، ن ت کے پکھینچو۔



فرض کرو کہ وتر تماس ت ت نقطہ و ن سے ع پر ملتا ہے۔
چونکہ مثلث و ن ت قائم الزاویہ ہے اور ت ع عمود ہے و ت و ن پر اس لیے و ن ع = و ت
اس لیے بلحاظ دائرہ (و) کے نقاط ن اور ع ایک دوسرے کے متقارب ہیں۔
نیز وتر تماس ت ت نقطہ ن کے متقارب ع میں سے گزرتا ہے

اور ون پر عمود وار ہے۔
اس لیے بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا قطبی وتر تمامات تہہ ہے۔
۵۳۔ مسئلہ۔ اگر بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ا کا قطبی نقطہ ب
میں سے گزرے تو ب کا قطبی ا میں سے گزرے گا۔



فرض کرو کہ دائرہ (و) کے لحاظ سے ا کا قطبی خط ل م ہے
حب مفروض خط ل م نقطہ ب میں سے گزرتا ہے
فرض کرو کہ و ا اور ل م کا نقطہ تقاطع م ہے
و ب کو ملاؤ اور اسے و ب پر عمود ان نکالو۔
چونکہ م اور ن پر کے زاویے قائمہ زاویے ہیں
اس لیے ون \times و ب = و م \times و ا = ر جہاں ر دائرہ (و) کا
نصف قطر ہے۔

اس لیے بلحاظ دائرہ (و) کے ب کا مقلوب ن ہے
نیز ا عمود ہے و ب پر

اس لیے ب کا قطبی ن ا ہے اور یہ خط نقطہ ا میں سے گزرتا ہے
پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ :- اس مسئلہ کو قطب اور قطبی کی متکافی خاصیت سے موسوم کرتے ہیں۔
مندرجہ بالا مسئلہ سے ظاہر ہے کہ اگر ایک دائرہ کے لمحاظ سے دو خطوط میں سے
ایک کا قطب دوسرے پر ہو تو دوسرے کا قطب پہلے پر ہوگا۔

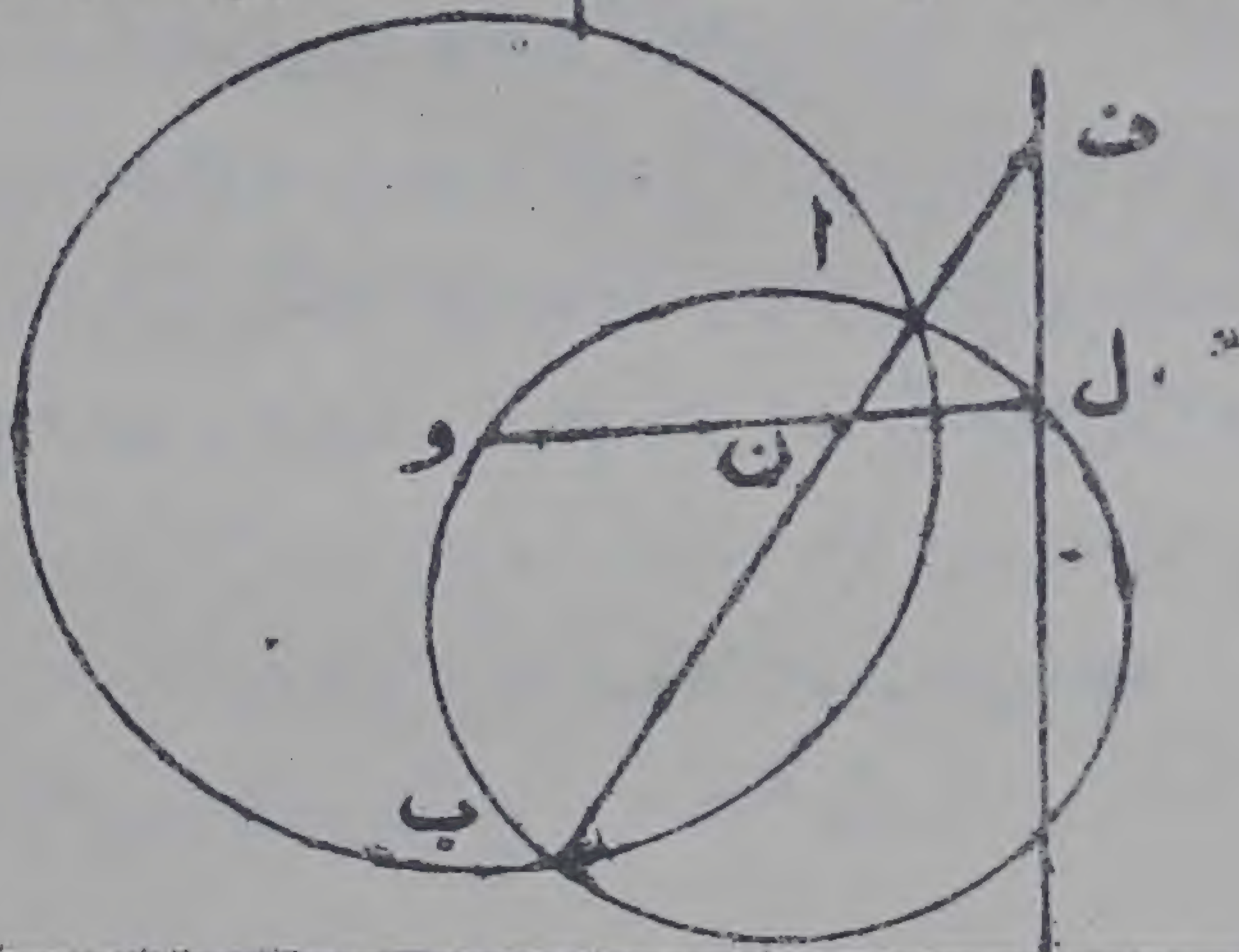
۵۴۔ تعریفات۔

(۱) ایک دیے ہوئے دائرہ کے لمحاظ سے دو دیے ہوئے نقطے
مزدوج نقطے کہلاتے ہیں اگر ان نقطوں میں سے کسی کا ایک قطبی دوسرے
نقطے میں سے گزرے۔

(۲) ایک دیے ہوئے دائرہ کے لمحاظ سے دو دیے ہوئے خطوط
مزدوج خطوط کہلاتے ہیں اگر ان میں سے کسی ایک خط کا قطب دوسرے
خط پر واقع ہو۔

(۳) اگر ایک دیے ہوئے دائرہ کے لمحاظ سے ایک مثلث کے ہر رأس کا
قطبی مقابل کا ضلع ہو تو مثلث مذکور دیے ہوئے دائرہ کے لمحاظ سے مثلث
مزدوج بالذات کہلاتا ہے۔

* ۵۵۔ مسئلہ۔ اگر ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا جائے
جو ایک دیے ہوئے دائرہ (و) سے نقاط ا اور ب پر اور نقطہ ن کے قطبی
سے ف پر ملے تو اب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہے۔



صورت اول - فرض کرو کہ ثابت نقطہ ن دائرہ کے اندر ہے۔

فرض کرو کہ ون، ن کے قطبی سے ل پر ملتا ہے۔

تب ون \times ن ل = ون (ول - ون) = ون \times ول - ون
 = وا - ون (کیونکہ ون \times ول = وا)

نیز ب ن \times ا = وا - ون

اس لیے ون \times ن ل = ب ن \times ا

یعنی نقاط و، ب، ل، ا مشترک المحيط ہیں۔

نقاط و، ب، ل، ا میں سے گزرنے والا دائرہ کھینچو۔

اس دائرہ کا وتر و ب = وتر و ا، کیونکہ ہر ایک وتر دائرہ (و) کے نصف قطر کے مساوی ہے۔ اس لیے و ا اور و ب کے محاذی ل پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

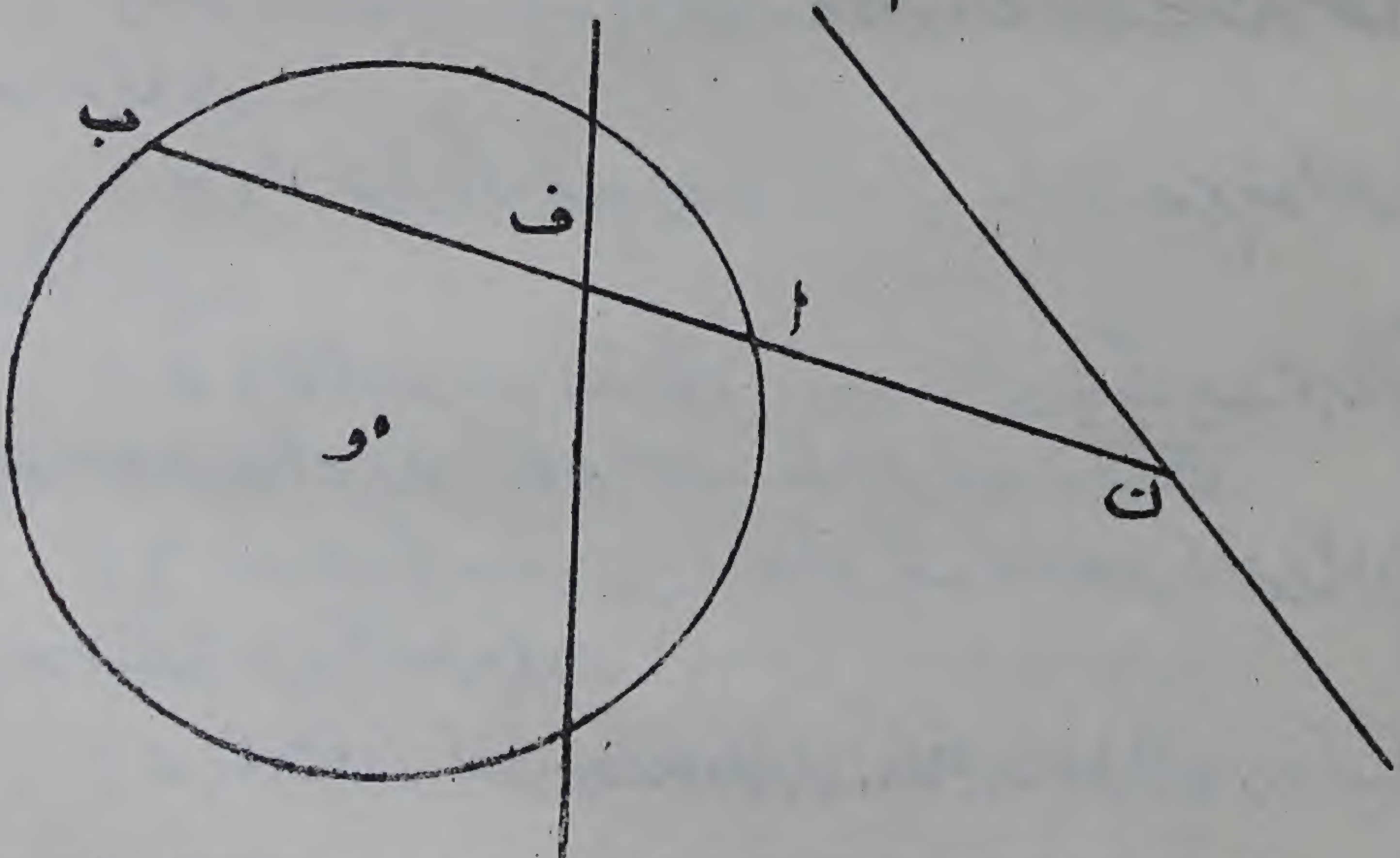
یعنی ل ن اندرونی مُنصف ہے ب ل اکا

نیز چونکہ ن ل ف قائم ہے

اس لیے ل ف خارجی مُنصف ہے ب ل اکا

اس لیے ا ب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہے۔

صورت دوم - فرض کرو کہ ثابت نقطہ ن دائرہ کے باہر ہے۔



چونکہ n کا قطبی n میں سے گزرتا ہے اس لیے n کا قطبی n میں سے گزریگا۔ اس لیے صورت اول کی رو سے n کی موسیقی تقسیم n اور n پر ہوتی ہے۔
پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ :- اس مسئلہ کو ”قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت“ سے تعبیر کرتے ہیں۔ اس دفعہ کے مسئلہ کا عکس حسب ذیل ہے :-

اگر ایک ثابت نقطہ n میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو ایک دیے ہوئے دائرہ (و) سے نقاط ۱ اور ۲ پر ملے اور n پر ایک نقطہ n ایسا لیا جائے کہ n کی موسیقی تقسیم n اور n پر ہوتی ہو تو n کا طریق n کا قطبی ہوگا۔
اس کا ثبوت طالب علم مشق کے طور پر خود بہم پہنچائے۔

مسئلہ ۱۵

(۱) ثابت کرو کہ دو نقطوں کو ملانے والا خط ایک دیے ہوئے دائرہ کے لمحاظ سے ان نقطوں کے قطبیوں کے نقطہ تقاطع کا قطبی ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ دو خطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع ایک دائرہ کے لمحاظ سے ان خطوط کے قطبیوں کو ملانے والے خط کا قطب ہے۔

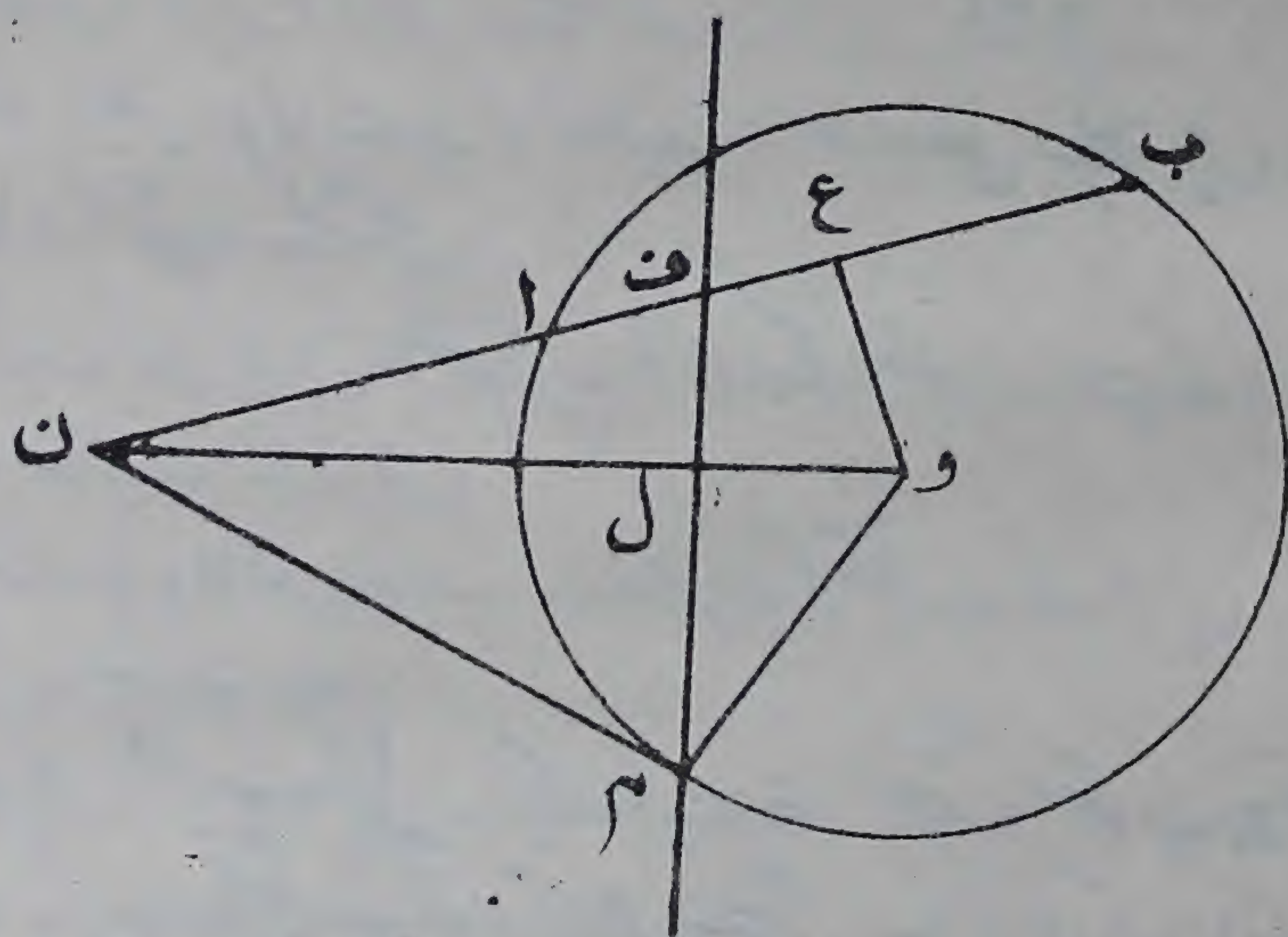
(۳) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے لمحاظ سے متراکز خطوط کے قطب ہم خط ہیں۔

(۴) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے لمحاظ سے ہم خط نقطوں کے قطبی متراکز ہیں۔

(۵) بلحاظ دائرہ (و) کے نقاط ۱ اور ۲ کے قطبی لیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ۱ و ۲ مساوی ہے اس زاویہ کے جو ۱ اور ۲ کے قطبیوں سے بنتا ہے۔

(۶) دو ہم مرکز دائروں میں سے کسی ایک کے ماسوں کے قطبوں کا طریق بلحاظ دوسرے دائرہ کے معلوم کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مساوی دتروں کے قطبوں کا طریق دائرہ مذکور کے



فرض کرو کہ دائرہ (و) کے لحاظ سے ن کا قطبی خط ون سے ل پر اور
 دائرہ (و) سے م پر ملتا ہے۔
 ن م اور و م کہ ملاؤ اور و سے اب پر عمود و ع نکالو۔
 چونکہ ن م دائرہ (و) کا مماس ہے،

اس لیے $n \times n = n^2$ (کیونکہ $n \times n$ قائمہ ہے)
 $n \times n = n^2$ (کیونکہ نقاط $n \times n$ ف، ل
 مشترک محیط ہیں)

اس لیے $n \times n = n^2$ (کیونکہ $n \times n$ ف، ل
 مشترک محیط ہیں)

$$\frac{n \times n}{n + n} = n$$

یعنی n فی موسیقی اوسط ہے n اور n کا۔

۵۶۔ **تقلیب**۔ دفعہ ۵۰ کی تعریف کی مدد سے ہم ایک
 دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے جس کا نصف قطر ہو ایک دیے ہوئے
 نقطہ n کا مقلوب نقطہ n معلوم کر سکتے ہیں۔ دائرہ کے مرکز کو تقلیب کا
 مرکز اور نصف قطر کو تقلیب کا نصف قطر کہتے ہیں۔
 نیز بعض اوقات n کو تقلیب کا مستقل کہتے ہیں۔ اور دائرہ کو
 تقلیب کا دائرہ کہتے ہیں۔

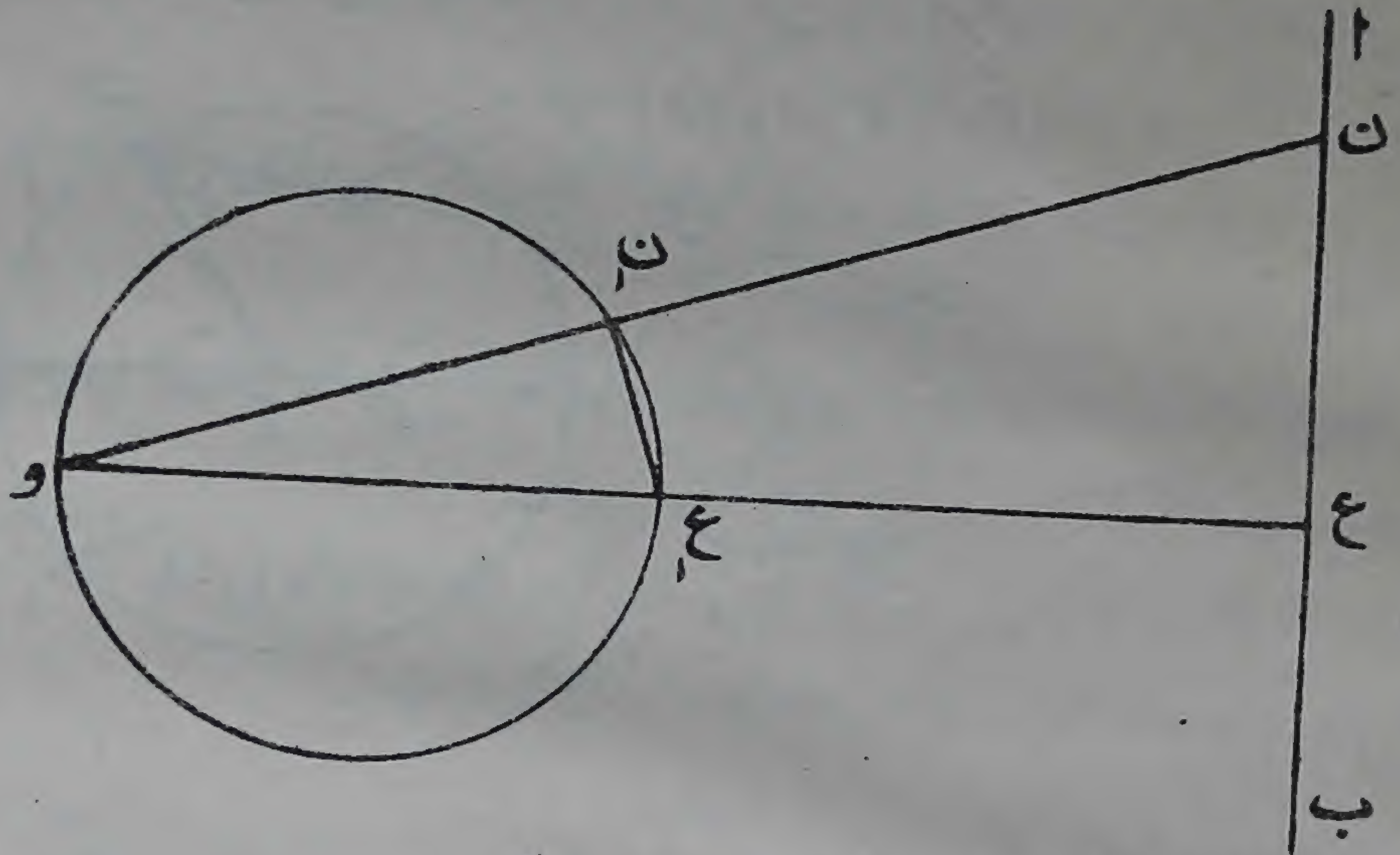
اگر n کوئی طریق مرتسم کرے تو n کے مقلوب n کے طریق کون کے
 طریق کا مقلوب کہتے ہیں۔

مندرجہ بالا تعریفات سے ظاہر ہے کہ تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والا
 ہر خط اپنا آپ مقلوب ہے۔

۵۷۔ **مسئلہ**۔ ایک ایسے خط مستقیم کا مقلوب جو تقلیب کے
 مرکز میں سے نہ گزرے تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والا ایک دائرہ ہوگا۔
 فرض کرو کہ دیا ہوا خط مستقیم n ہے اور تقلیب کا مرکز o اور
 تقلیب کا نصف قطر r ہے۔

و سے n پر عمود o نکالو اور o کا مقلوب o' معلوم کرو۔

نیز n پر کے کسی نقطہ n کا مقلوب n' معلوم کرو۔



بموجب تعریف $و ع \times و ع = ر$
اور $و ن \times و ن = ر$

$و ع \times و ع = و ن \times و ن$
نقاط $ع$ ، $ع$ ، $ن$ مشترک المیض ہیں۔

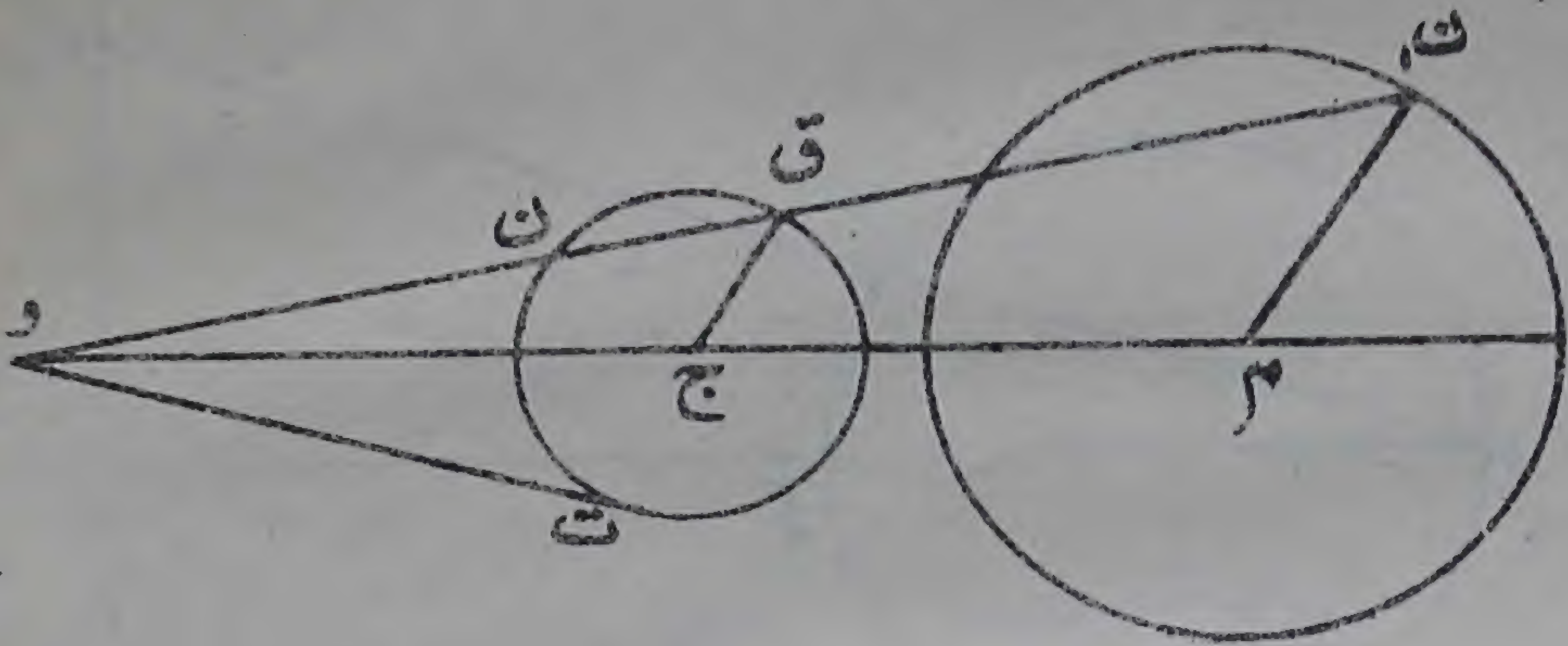
$و ن \times و ع = و ع \times و ن$ قائمہ زاویہ

اس لیے $و ع$ کے محاذی $ن$ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے
اس لیے $ن$ کا طریق یعنی خط مستقیم $اب$ کا مقبوع $و ع$ قطر پر کا

دائرہ ہے۔

نوٹ۔ مسئلہ بالا کی شکل میں نقاط $ن$ اور $ب$ ایک دوسرے کے مقبوع ہیں
اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ ایسے دائرہ کا مقبوع جو تقلیب کے مرکز میں سے
گزرتا ہے ایک خط مستقیم ہے جو دیے ہوئے دائرہ کے اس قطر پر جو تقلیب کے مرکز میں
گزرتا ہے عمود وار ہے اور تقلیب کے مرکز میں سے نہیں گزرتا ہے۔

۵۸۔ ایک ایسے دائرہ کا مقبوع جو تقلیب کے مرکز میں سے نہیں
گزرتا ہے ایک دائرہ ہے جو تقلیب کے مرکز میں سے نہیں گزرتا ہے۔
فرض کرو کہ تقلیب کا مرکز $و$ اور تقلیب کا مستقل $ر$ ہے۔ نیز فرض کرو کہ
دیے ہوئے دائرہ (ج) پر کے کسی نقطہ کا مقبوع $ن$ ہے۔



تقلیب کے مرکز و سے دائرہ (ج) کا ایک ماں و ت کھینچو فہم کرو کہ
 طول و ت = م
 نیز فہم کرو کہ خط و ن دائرہ (ج) سے مکر نقطہ ق پر ملتا ہے۔
 ق ج کو ملاؤ اور ن م متوازی ق ج کے کھینچو جو و ج سے م پر ملے۔
 چونکہ و ن × و ن = ر
 اور و ن × و ق = م

اس لیے $\frac{و ن}{و ق} = \frac{ر}{م}$ جو ایک مستقل مقدار ہے

نیز مشابہ مثلثات و م ن اور و ج ق سے

$$\frac{و م}{و ج} = \frac{م ن}{ج ق} = \frac{و ن}{و ق} \text{ جو ایک مستقل مقدار ہے}$$

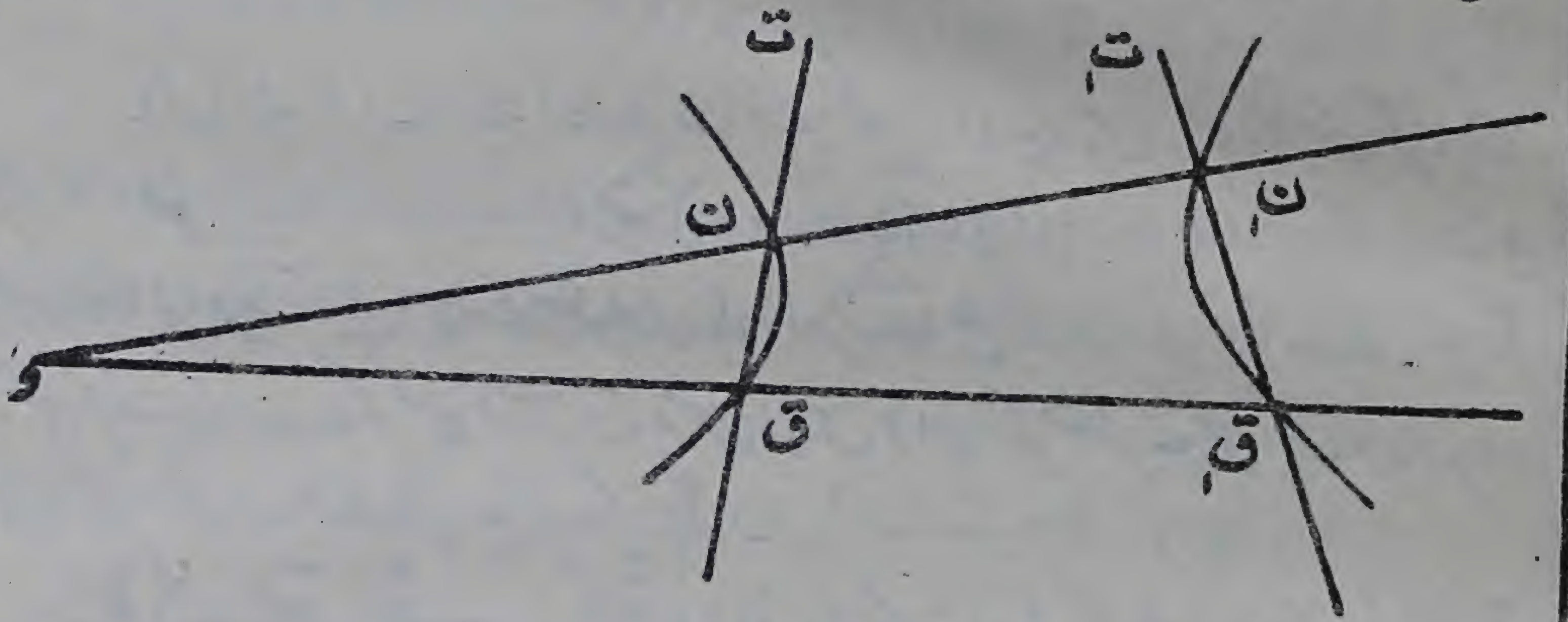
اس لیے م ایک ثابت نقطہ ہے اور م ن کا طول مستقل ہے۔
 پس ثابت ہو کہ ن کا طریق یعنی دیے ہوئے دائرہ (ج) کا مقلوب
 بلحاظ مرکز و کے ایک دائرہ ہے جس کا مرکز م ہے۔

* ۵۹۔ تعریفات۔

(۱) اگر ایک منحنی پر دو نقطے ن اور ق ہوں تو وتر ن ق کا

انتہائی مقام جب کہ نقطہ ق منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ن کے بے انتہا قریب آجاتا ہے منحنی کے نقطہ ن پر کا ماس کہلاتا ہے۔
اس تعریف سے ظاہر ہے کہ خط مستقیم کے کسی نقطہ پر کا ماس خود ہی خط مستقیم ہے۔

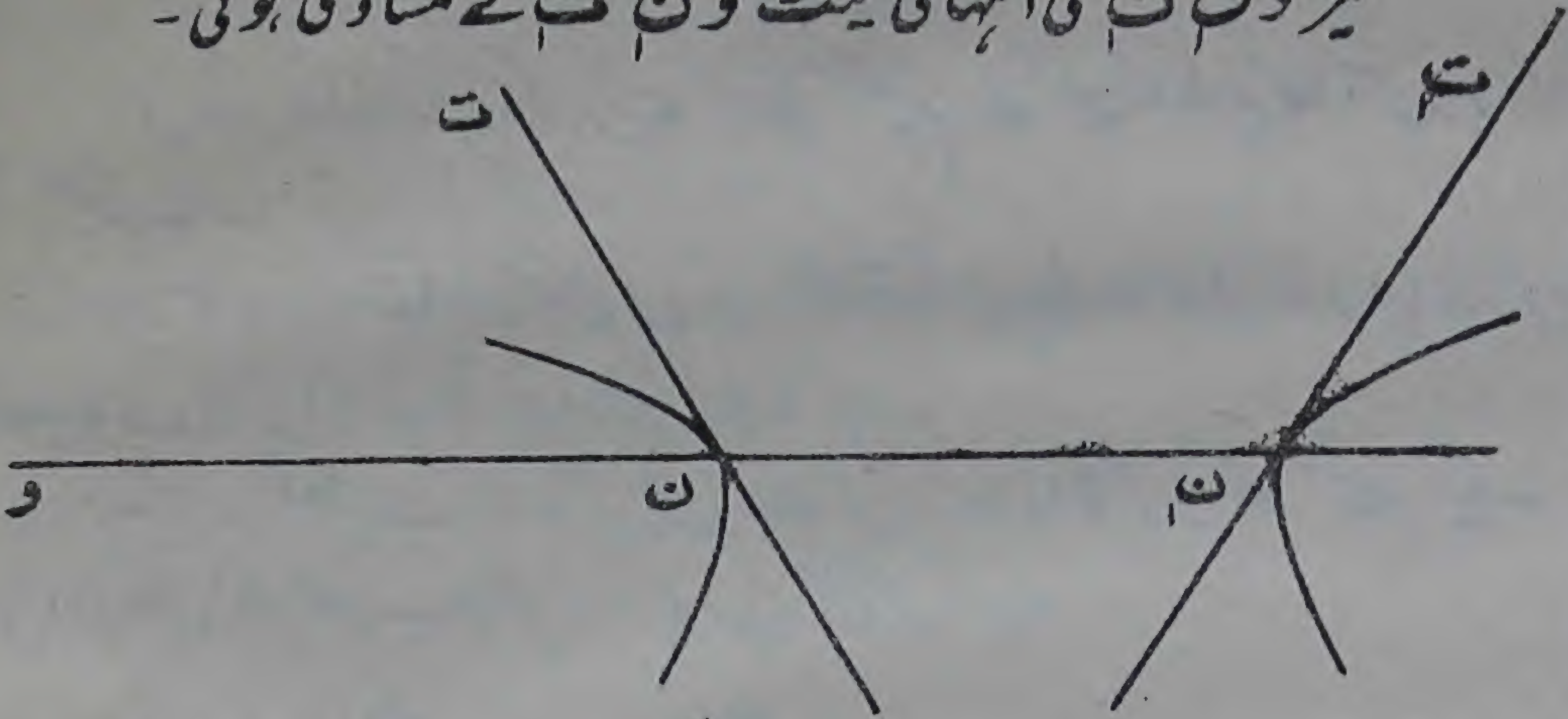
(۲) دو متقاطع منحنیوں کے نقطہ تقاطع پر کے ماسوں کا درمیانی زاویہ منحنیوں کا زاویہ تقاطع کہلاتا ہے۔
* ۶۰۔ تثلیث کے مرکز میں سے گزرنے والا کوئی خط مستقیم ایک منحنی اور اس کے مقلوب کو مکمل زاویوں پر قطع کرتا ہے۔



فرض کرو کہ تثلیث کا مرکز و اور نصف قطر ہے۔
منحنی پر دو نقطے ن اور ق ایک دوسرے کے قریب ہیں اور ان کے مقلوب ن اور ق ہیں جو لازماً ایک دوسرے کے قریب واقع ہونگے۔
ق ن کو ت تک اور ق ن کو ت تک خارج کرو۔
$$ون \times ون = وق \times وق$$
 کیونکہ ہر ایک مقدار تثلیث کے مستقل ر کے مساوی ہے۔

اس لیے ن، ن، ق، ق مشترک المحيط ہیں۔
اس لیے زاویے ون ت اور وق ن مکمل زاویے ہیں۔
اب جوں جوں نقطہ ق نقطہ ن کے قریب آتا ہے ویسے ہی نقطہ ق بھی ن کے قریب آئیگا اور انتہائی میں خطوط ق ن ت اور ق ن ت بالمستقیم

نقاط اورن پر منحنیوں کے مساوات ن ت اور ن ت بن جائینگے۔
نیز وقت ن کی انتہائی قیمت ون ت کے مساوی ہوگی۔



اس لیے ون ت اور ون ت مکمل زاویے ہیں۔ یہی ثابت کرنا تھا۔
نوٹ:۔ مندرجہ بالا نتیجہ کی مدد سے یہ آسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ دو متقاطع
منحنیوں کا زاویہ تقاطع ان کے مقلوبوں کے زاویہ تقاطع کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز اگر
دو منحنی ایک دوسرے کو کسی نقطہ ق پر مس کریں تو ان کے مقلوب بھی ایک دوسرے
کو ق کے مقلوب نقطہ ق پر مس کریں گے۔

۶۱۔ تعریف۔ اگر دو دائروں کا زاویہ تقاطع زاویہ قائمہ ہو تو
یہ دائرے علی القوائم دائرے کہلاتے ہیں۔ یا یوں کہا جاتا ہے کہ یہ دائرے
ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔

اس تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر دو دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم
قطع کریں تو کسی ایک نقطہ تقاطع پر ہر دائرہ کا مماس دوسرے دائرہ کے
مرکز میں سے گزرے گا۔

مندرجہ بالا نتیجہ کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے ”دو علی القوائم دائروں
کے کسی ایک نقطہ تقاطع تک پہنچے ہوئے نصف قطر ایک دوسرے پر
علی القوائم ہوتے ہیں اور دائروں کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کا
مربع ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا
ہے۔“

مسئلہ ۱۶

- (۱) اگر تغلیب کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک خط مستقیم پر کے تین نقطوں ن، ق، ط کے مقلوب ن، ق، ط ہوں تو ثابت کرو کہ (۱) اگر ون، وق، و ط سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ون، وق، و ط سلسلہ موسیقیہ میں ہونگے۔ (ب) ون، وق، و ط سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ون، وق، و ط سلسلہ ہندسیہ میں ہونگے۔
- (۲) ایک خط مستقیم ایک دائرہ کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ تغلیب کے مرکز اور نصف قطر کے مناسب انتخاب سے دیا ہوا خط دیے ہوئے دائرہ میں منقلب کیا جاسکتا ہے۔
- (۳) اگر ایک دیے ہوئے دائرہ کے باہر کے کسی نقطہ پر تغلیب کا مرکز لیا جائے تو ثابت کرو کہ تغلیب کے نصف قطر کے مناسب انتخاب سے دیا ہوا دائرہ اپنے آپ میں منقلب ہو سکتا ہے۔
- (۴) اگر تغلیب کے مرکز و اور نصف قطر کے لحاظ سے نقاط ن اور ق کے مقلوب ن اور ق ہوں تو ثابت کرو کہ $ن ق = ون \times وق$ ۔
- (۵) اگر تغلیب کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط پر کے دو نقطوں ن اور ق کے مقلوب ن اور ق ہوں اور تغلیب کے دائرہ پر کوئی نقطہ لا ہو تو ثابت کرو کہ $ن ق = ن لاق$ ۔
- (۶) اُن دائروں کے مرکروں کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر علی القوائم قطع کریں۔
- (۷) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر علی القوائم قطع کرے۔
- (۸) ایک دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر علی القوائم قطع کرے۔
- (۹) ثابت کرو کہ دو علی القوائم دائروں میں سے ایک کے کسی قطر کی موسیقی تقسیم

دوسرے کے محیط پر، موقی ہے۔ (دیکھو دفعہ ۹۲)۔

(۱۰) بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا منقلب ن ہے ثابت کرو کہ نقا

ن اور ن میں سے گزرنے والا ہر دائرہ (و) کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

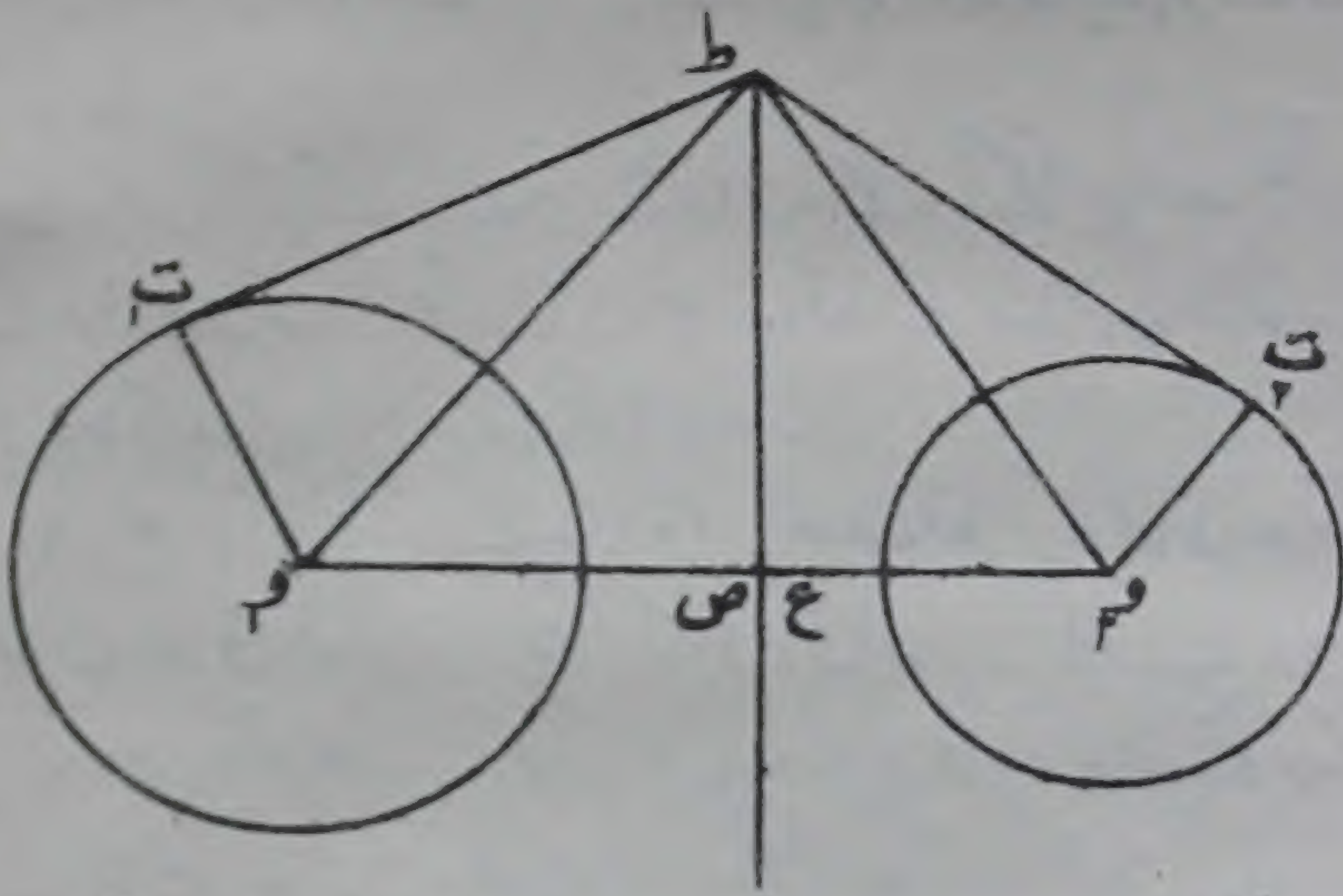
(۱۱) بلحاظ دائرہ (و) کے نقاط ن اور ق مزدوج نقطے ہیں۔ ثابت کرو کہ

وہ دائرہ جس کا قطر ن ق ہے، دائرہ (و) کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

۹۲۔ مسئلہ۔ اس نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے دائروں

تک پہنچے ہوئے مماس مساوی ہوں ایک خط مستقیم ہے جو دائروں کے مرکزوں کو

ملائے والے خط پر عمود وار ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ (و) اور (و) دو دیے ہوئے دائرے ہیں جن کے نصف قطر

بالترتیب ل اور ل ہیں۔ نیز فرض کرو کہ نقطہ ط سے ان دائروں تک پہنچے

ہوئے مماسات ط ت اور ط ت مساوی ہیں۔

و ط، و ت، و ط اور و ت کو ملاؤ اور ط سے و پر عمود ط ع

نکالو۔

چ کہ حسب مفروض ط ت = ط ع

و ط ت = ط ت

و ط و - و ت = ط و - و ت

$$\therefore \text{ع ط} + \text{و ع} - \text{و ت} = \text{ع ط} + \text{و ع} - \text{و ت}$$

$$\therefore \text{و ع} - \text{و ع} = \text{و ت} - \text{و ت}$$

$$= \text{و} - \text{و} \text{ جو ایک مستقل مقدار ہے۔}$$

$$\text{لیکن } \text{و ع} - \text{و ع} = (\text{و ع} + \text{و ع}) - (\text{و ع} - \text{و ع})$$

$$= \text{و و} (2 \text{ ص ع}) \text{ جہاں } \text{و و} \text{ کا وسطی نقطہ ص ہے۔}$$

$$\therefore 2 \text{ و و} \times \text{ص ع} = \text{و} - \text{و} \text{ جس سے حاصل ہوتا ہے کہ مرکزوں کو}$$

ملاسے والے خط پر ع ایک ثابت نقطہ ہے۔

پس ثابت ہوا کہ نقطہ ط کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مرکزوں کے

خط پر عمود وار ہے۔

نوٹ۔ ثبوت بالا میں یہ بات ضمناً ثابت ہوئی ہے کہ نقطہ ع مرکزوں کے

خط کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے مربعوں کا فرق دیے ہوئے دائروں کے

نصف قطروں کے مربعوں کے فرق کے مساوی ہے۔

طالب علم بطور مشق کے یہ ثابت کرے کہ اس صورت میں طریق کی دوسری شرط بھی

پوری ہوتی ہے یعنی اس طریق پر کے کسی نقطہ سے دائروں تک کھینچے ہوئے حاسات

مساوی ہیں۔

۴۳۔ **تخریف۔** اس نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے دائروں

تک کھینچے ہوئے حاس مساوی ہوں دیے ہوئے دائروں کا بیابادی محور

کہلاتا ہے۔

نوٹ (۱)۔ اگر دیے ہوئے دائرے متقاطع ہوں تو صریحاً ان کے نقاط

تقاطع مطلوبہ طریق پر واقع ہیں۔ اس لیے مطلوبہ طریق ان نقاط تقاطع میں سے

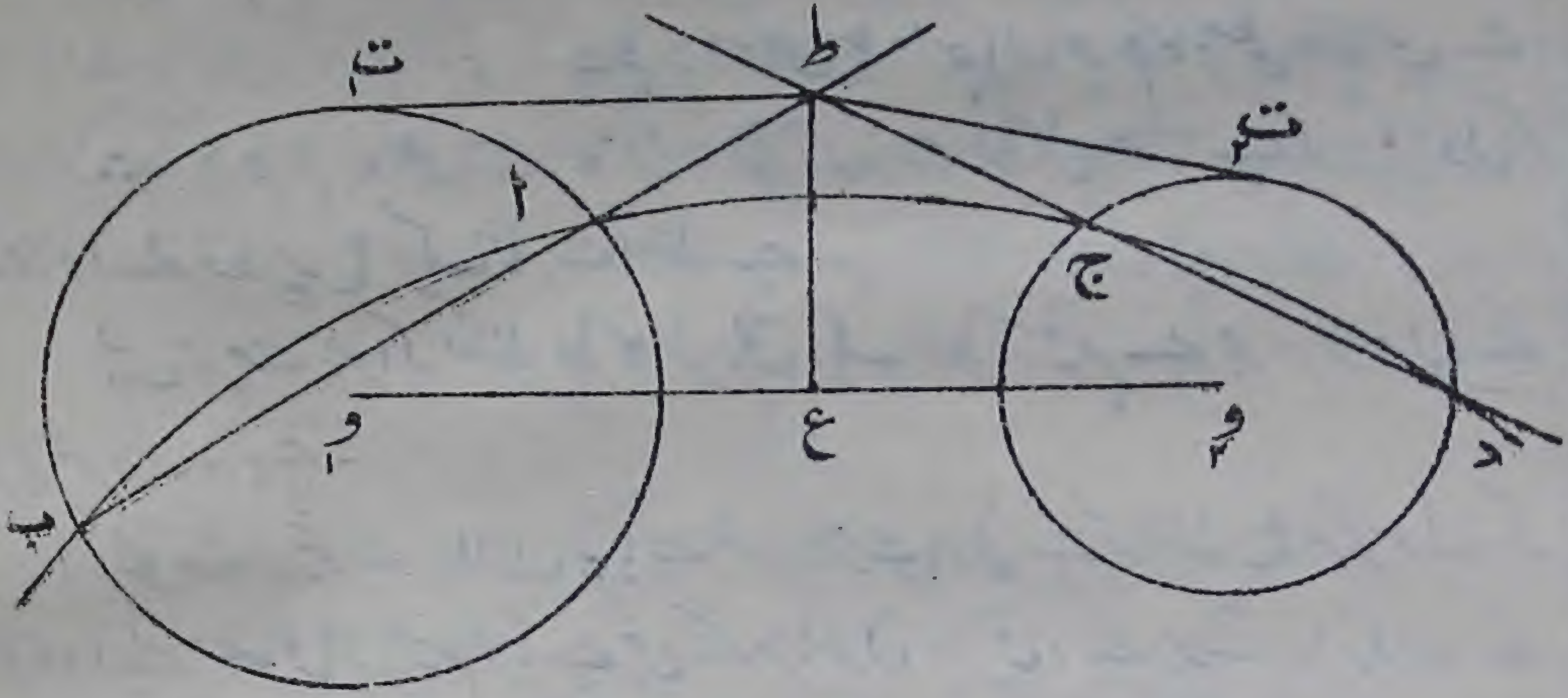
گزرنے والا خط مستقیم یعنی دیے ہوئے دائروں کا وتر مشترک (محدودہ) ہے۔ وتر مشترک

کے اس حصہ پر کے کسی نقطہ سے جو دیے ہوئے دائروں کے اندر ہے دائروں کے کوئی حقیقی

حاس نہیں کھینچ سکتے ہیں، لیکن کہا جاتا ہے کہ خیالی حاس کھینچ سکتے ہیں اور ان کے خیالی طول

مساوی ہیں۔ اس نکتہ کی مزید تشریح ہندسہ تحلیلی کی کسی کتاب میں پائی جاسکتی ہے۔

نوٹ (۲)۔ اگر دیے ہوئے دائرے غیر متقاطع ہوں تو نقطہ $ع$ دونوں دائروں کے باہر واقع ہوگا۔ اس لیے مطلوبہ طریقہ کلینہ دونوں دائروں کے باہر واقع ہوگا۔
۶۴۔ دو دیے ہوئے دائروں (و) اور (پ) کا بنیادی محور کھینچنا۔



کوئی دائرہ کھینچو جو دائرہ (و) کو (ا) اور (ب) پر اور دائرہ (پ) کو (ج) اور (د) پر قطع کرے۔ اب اور (د) کے نقطہ تقاطع $ط$ سے مرکزوں کے خط $و$ و $پ$ پر عمود $ط$ ع نکالو۔

تب $ط$ ع مطلوبہ بنیادی محور ہوگا۔
نقطہ $ط$ سے دائروں (و) اور (پ) کے مماس $ط$ ا اور $ط$ ج کھینچو۔

$$ط ا \times ط ب = ط ج \times ط د \quad (۱)$$

$$اور \quad ط ا \times ط ب = ط ج \times ط د \quad (۲)$$

چونکہ نقاط $ط$ ا، $ط$ ب، $ط$ ج، $ط$ د مشترک المحيط ہیں۔

$$اس لیے \quad ط ا \times ط ب = ط ج \times ط د \quad (۳)$$

(۱)، (۲) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

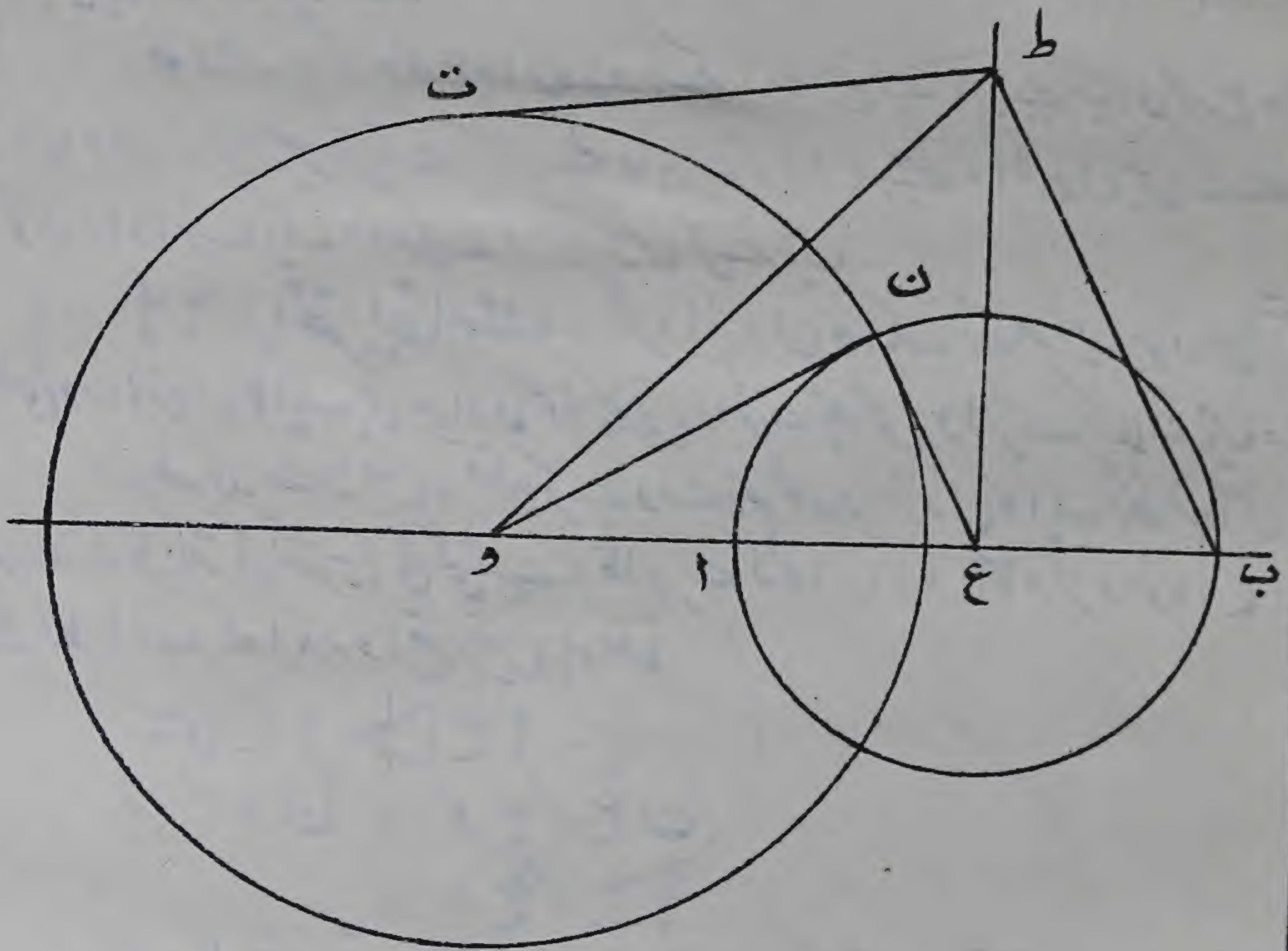
$$ط ا \times ط ب = ط ج \times ط د$$

$$ط ا \times ط ب = ط ج \times ط د$$

یعنی

یعنی نقطہ ط دیے ہوئے دائروں (و) اور (ن) کے بنیادی محور پر کا ایک نقطہ ہے۔ اور چونکہ ط ع مرکزوں کے خط و و پر عمود ہے، اس لیے ط ع دیے ہوئے دائروں کا بنیادی محور ہے۔
نوٹ۔ متقاطع دائروں کا بنیادی محور کھینچنے کے لیے اس طولانی عمل کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ ان کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والا خط مستقیم ہی بنیادی محور ہوتا ہے۔

۶۵۔ مسئلہ۔ اگر ایسے دائرے کھینچے جائیں جن کے مرکز ایک دیے ہوئے دائرہ کے ایک قطر محدودہ پر ہوں اور جو دیے ہوئے دائرہ کو علی القوام قطع کریں تو ان دائروں میں سے کسی دو دائروں کا بنیادی محور وہ خط مستقیم ہوگا جو دیے ہوئے دائرہ کے مرکز میں سے گزرے اور دیے ہوئے قطر پر عمود وار ہو۔



فرض کرو کہ دیا ہوا دائرہ (ع) ہے۔ اس کے ایک ثابت قطر اب محدودہ پر کوئی نقطہ و لو اور و کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو جو دائرہ (ع) کو نقطہ ن پر

علی القوائم قطع کرے۔ ویسے ہوسے دائرہ کے مرکز ع میں سے ایک خط مستقیم کھینچو جو ثابت قطر اب پر عمود وار ہو اور اس قطر پر کوئی نقطہ ط لو اور ط سے دائرہ (و) کا محاس ط ت کھینچو۔

وط، ون، ع ن اور ط ب کو ملاؤ۔

تب ط ت = ط و - ون

= ط ع + و ع - (و ع - ع ن)

= ط ع + ع ن

= ط ع + ع ب

= ط ب جو و کے تمام مقاموں کے لیے مستقل ہے۔

اس لیے دائرہ (و) جیسے کسی دو دائروں کا بنیادی محور خط مستقیم ع ط ہے یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ۔ چونکہ نقطہ ع دائرہ (و) کے باہر واقع ہے اس لیے بنیادی محور ع ط دائرہ (و) کو قطع نہیں کرتا ہے۔ اس لیے ظاہر ہے کہ (و) جیسے دائروں میں سے کوئی دو دائرے ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے ہیں۔

۶۶۔ **تقریفات**۔ اگر دو دائروں کا ایک نظام ایسا ہو کہ ان میں سے کسی دو دائروں کا ایک ہی بنیادی محور ہو تو یہ دائرے ہم محور دائرے کہلاتے ہیں۔ دھنہ گذشتہ میں نہ قطع کرنے والے ہم محور دائروں کا ایک نظام حاصل کرنے کے طریقہ کی تشریح کی گئی ہے۔ ظاہر ہے کہ دائرہ (و) کا مرکز دائرہ (ع) کے قطر اب کے اندر واقع نہیں ہو سکتا

یعنی ع و > ۱۴۔

نیز ون = و ع - ع ن

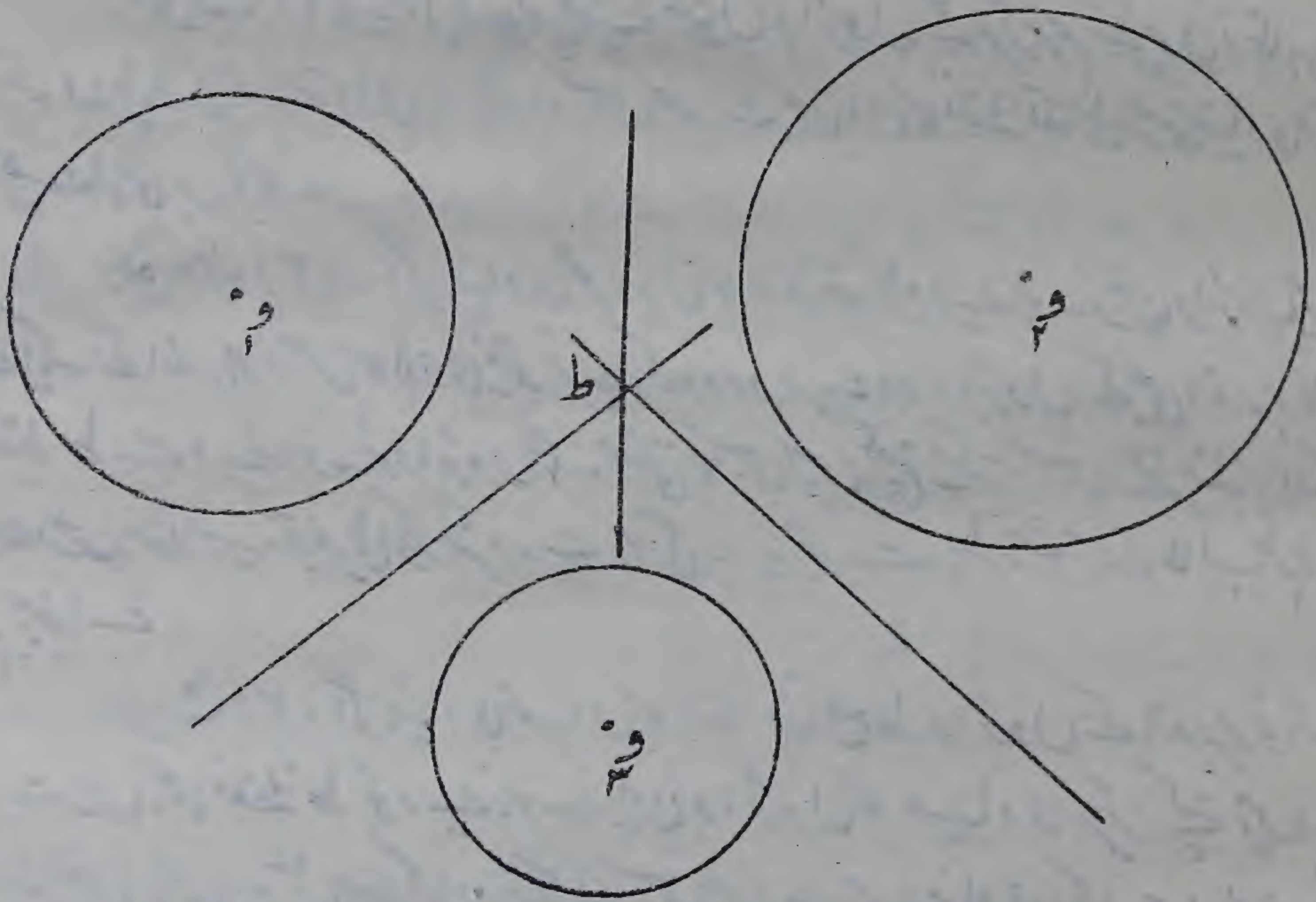
= و ع - ع ا

اس لیے جوں جوں نقطہ و دائرہ (ع) کے قریب آتا ہے ویسے ہی دائرہ (و) کا نصف قطر بتدریج گھٹتا ہے اور جب نقطہ و نقاط ا اور ب میں سے کسی ایک پر منطبق ہوتا ہے تو دائرہ (و) کا نصف قطر صفر ہے۔ نقاط ا اور ب

ہم محور دائروں کے اُس نظام کے انتہائی نقطے کہلاتے ہیں جس کا ہر مرکز دائرہ
(ع) کو علی القوام قطع کرتا ہے۔ ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے
نظام کے نقطہ دائرے بھی کہلاتے ہیں۔

اگر متعدد دائرے ایسے ہوں کہ ان میں سے ہر ایک دائرہ دو ثابت
نقطوں میں سے گزرتا ہے تو ان دائروں سے قطع کرنے والے ہم محور دائروں کا
ایک نظام حاصل ہوتا ہے اور اس نظام کا چھوٹے سے چھوٹا دائرہ وہ دائرہ ہے جو
وٹر مشترک کے قطر پر کھینچا گیا ہے۔ اس لیے قطع کرنے والے ہم محور دائروں کے
نظام کی صورت میں انتہائی نقطے یا نقطہ دائرے وجود نہیں رکھتے ہیں۔

۶۷۔ مسئلہ۔ تین دائروں میں سے دو دو دائروں
کے تین بنیادی محور متراکز ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ (و) (و) اور (و) تین دیے ہوئے دائرے ہیں۔
نیز فرض کرو کہ دائروں (و) (و) اور (و) کا بنیادی محور دائروں (و) (و) اور (و)
کے بنیادی محور کو نقطہ ط پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرنا ہے کہ دائروں (و) (و) اور (و) کے

بنیادی محور نقطہ ط میں سے گزرتا ہے۔

چونکہ نقطہ ط دائرؤں (و) اور (و) کے بنیادی محور پر ہے، اس لیے ط سے دائرؤں (و) اور (و) تک کھینچے ہوئے مماثلوں کے طول مساوی ہیں۔ اسی طرح سے ط سے دائرؤں (و) اور (و) تک کھینچے ہوئے مماثلوں کے طول بھی مساوی ہیں۔

اس لیے ط سے دائرؤں (و) اور (و) تک کھینچے ہوئے مماثلوں کے طول مساوی ہیں۔

اس لیے نقطہ ط دائرؤں (و) اور (و) کے بنیادی محور پر واقع ہے۔ یعنی دائرؤں (و) اور (و) کا بنیادی محور نقطہ ط میں سے گزرتا ہے۔
تقریف - تین دائرؤں میں سے دو کے تین بنیادی محوروں کے نقطہ تراکز کو ان دائرؤں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔

نوٹ (۱) - اگر دیے ہوئے تینوں دائرؤں کے مرکز ہم خط ہوں تو ظاہر ہے کہ تینوں بنیادی محوری موازی ہونگے اور اس صورت میں ان کا نقطہ تقاطع یعنی بنیادی مرکز لاتسنا ہی پر ہوگا۔

نوٹ (۲) - اگر بنیادی محوروں کا نقطہ تقاطع دیے ہوئے تین دائرؤں میں سے ایک کے اندر ہو (جس کا لازمی نتیجہ یہ ہے کہ وہ دوسرے دو دائرؤں کے بھی اندر ہوگا) تو نقطہ ط سے دیے ہوئے دائرؤں تک حقیقی مماس نہیں کھینچ سکتے۔ اس لئے مسئلہ بالا کے ثبوت میں مناسب تبدیلی کی ضرورت ہوگی۔ یہ ثبوت بطور مشق کے طالب علم خود بہم پہنچائے۔

نوٹ (۳) - اگر بنیادی محوروں کا نقطہ تقاطع ط دائرؤں کے اندر ہو تو اس صورت میں بھی نقطہ ط کو دیے ہوئے تین دائرؤں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔ ہندسہ تحلیلی میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ اس صورت میں بنیادی مرکز سے دیے ہوئے تین دائرؤں تک کھینچے ہوئے خیالی مماسات کے خیالی طول مساوی ہیں۔

امثلہ ۱

(۱) ثابت کرو کہ دو دائرؤں کا بنیادی محور ان دائرؤں کے مشترک مماسوں

کی تنصیف کرتا ہے۔

(۲) اگر دو دائروں کے بنیادی محور پر کے کسی نقطہ سے ان دائروں میں سے کسی ایک کا مماس کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز یہ نقطہ ہے اور نصف قطر مماس کا طول ہے دیے ہوئے دونوں دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۳) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں تو ثابت کرو کہ ان کا بنیادی محور نقطہ تماس پر مشترک مماس ہے۔

(۴) اگر تین دائروں میں سے ہر دو ایک دوسرے کو مس کریں تو ثابت کرو نقاط تماس پر کے مماس مسترا کرز ہوتے ہیں۔

(۵) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کو قطران کر تین دائرے کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان دائروں کا بنیادی مرکز مثلث کا مرکز عمودی ہے۔

(۶) تین دیے ہوئے دائروں کا بنیادی مرکز وہ ہے اور وہ سے ان دائروں میں سے کسی ایک کا مماس و ت کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز و اور نصف قطر و ت ہے دیے ہوئے تینوں دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ وہ تمام دائرے جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزریں اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کریں ایک اور ثابت نقطہ میں سے بھی گزریں گے۔

(۸) اُن دائروں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزریں اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کریں۔

(۹) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کرے۔

(۱۰) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور دو دیے ہوئے دائروں کو علی القوائم قطع کرے۔

(۱۱) (۱) اور (۲) دو دیے ہوئے دائرے ہیں نقطہ ط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ط سے دائروں (۱) اور (۲) تک کھینچے ہوئے مماسوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ ط کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو دیے ہوئے دائروں کے بنیادی محور کے متوازی ہے۔

پانچواں باب

دائرہوں کا بنانا

۶۸۔ تین شرائط کے دیے جانے پر ایک دائرہ بنایا جاسکتا ہے مثلاً
(۱) تین دیے ہوئے نقطوں میں سے جو ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں ایک دائرہ
کھینچ سکتا ہے (۲) ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے جس کا نصف قطر دیا ہوا ہو اور جو ایک
دیے ہوئے خط (یا دائرہ) کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔

۶۹۔ دو شرائط کو پورا کرنے والے دائرہوں کے مرکزوں کے طریق کے
متعلق مندرجہ ذیل اہم نتائج سے طالب علم پہلے ہی سے واقف ہوگا۔
(۱) اس دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہو اور جو ایک
دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے ایک دائرہ ہے جس کا مرکز دیے ہوئے
نقطہ پر ہے۔

(۲) اس دائرہ کے مرکز کا طریق جو دو دیے ہوئے نقطوں میں سے
گزرے دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کا عمودی منصف ہے۔
(۳) اس دائرہ کے مرکز کا طریق جو دو دیے ہوئے متقاطع خطوط کو مس
کرے ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصف ہیں۔

(۴) ایک دیے ہوئے خط کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرنے والے
دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط ہے جو نقطہ مذکور میں سے گزرتا ہے اور
دیے ہوئے خط پر عمود ہے۔

(۵) ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرنے والے
دائرہ کے مرکز کا طریق دیے ہوئے نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملانے والا خط ہے۔
(۶) ایک ایسے دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہے اور جو
ایک دیے ہوئے خط کو مس کرتا ہے دیے ہوئے خط کے متوازی خطوط کا ایک
جوڑا ہے۔
(۷) ایک ایسے دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہے
اور جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرتا ہے دیے ہوئے دائرہ کے ساتھ
ہم مرکز دائروں کا ایک جوڑا ہے۔

امثلہ ۱۸

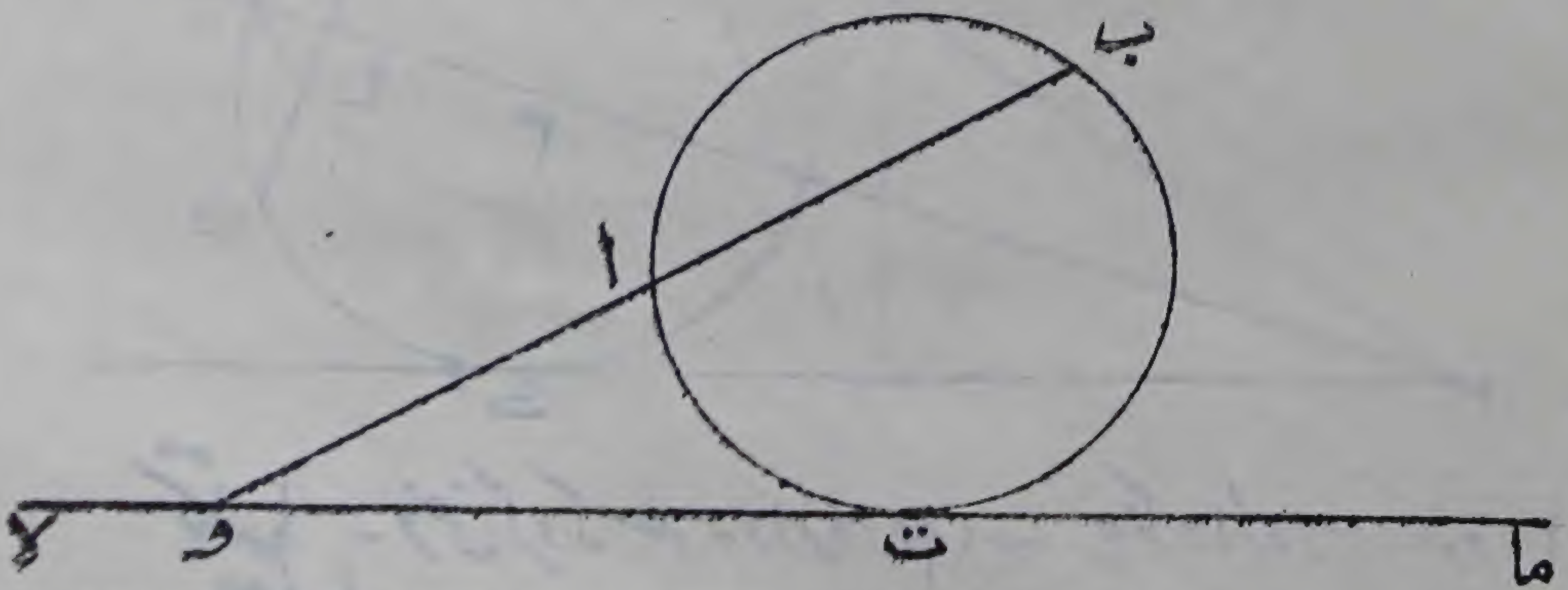
(۱) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک
دیے ہوئے خط کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔
(۲) دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو دو معلوم
نقطوں میں سے گزرے۔
(۳) دیے ہوئے نصف قطر والا دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے خطوں (یا
دائرہ) کو مس کرے۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں؟
(۴) دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے
نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے خط کو یا ایک دیے ہوئے دائرہ کو
مس کرے۔
(۵) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور
ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔
۷۔ مسئلہ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ
(ج) کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے خط مستقیم لاہا کو ایک دیے ہوئے
نقطہ پر مس کرے۔

اب چونکہ دائرہ (م) خط لاما کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے
 اس لیے م ن عمود ہے لاما پر
 اس لیے ج ف بھی عمود ہے لاما پر
 پس اگر دیے ہوئے دائرہ کے مرکز ج سے دیے ہوئے خط لاما پر عمود
 کھینچا جائے تو اس عمود اور دائرہ (ج) کے نقطہ تقاطع سے نقطہ ف حاصل
 ہوتا ہے اور ف ن اور دائرہ (ج) کا نقطہ تقاطع م مطلوبہ نقطہ تماس ہے
 اور ج م کے تقاطع سے مطلوبہ دائرہ کا مرکز م حاصل ہوتا ہے۔
 اس تحلیل کی بنا پر طالب علم اس عملی مسئلہ کا حل مع ثبوت خود بہم پہنچائے
 منفی ٹ۔ وہ خط جوج میں سے گزرتا ہے اور لاما پر عمود ہے دائرہ (ج) کو
 ایک اور نقطہ ف پر بھی کاٹتا ہے جس کی مدد سے دیے ہوئے شرائط کو پورا کرنے والا
 ایک اور دائرہ بھی کھینچ سکتا ہے۔

منفی ٹ۔ مندرجہ بالا طریقہ آسانی ذیل کے عملی مسئلہ کے حل کے طریقہ کی طرف
 رہنمائی کرتا ہے۔

مسئلہ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کو
 ایک دیے ہوئے نقطہ ن پر مس کرے اور ایک دیے ہوئے خط لاما کو بھی
 مس کرے۔

اس عملی مسئلہ کا حل مع ثبوت طالب علم خود بطور مشق کے بہم پہنچائے۔
مسئلہ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے خط لاما کو



مس کرے اور دو دیے ہوئے نقطوں ۱ اور ۲ میں سے جو لاکھا کی ایک ہی جانب واقع ہوں گزرے۔

تحلیل۔ فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ دیے ہوئے خط لاکھا کو نقطہ ۱ پر مس کرتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ خط ۱ ا دیے ہوئے خط لاکھا کو نقطہ ۲ پر قطع کرتا ہے۔

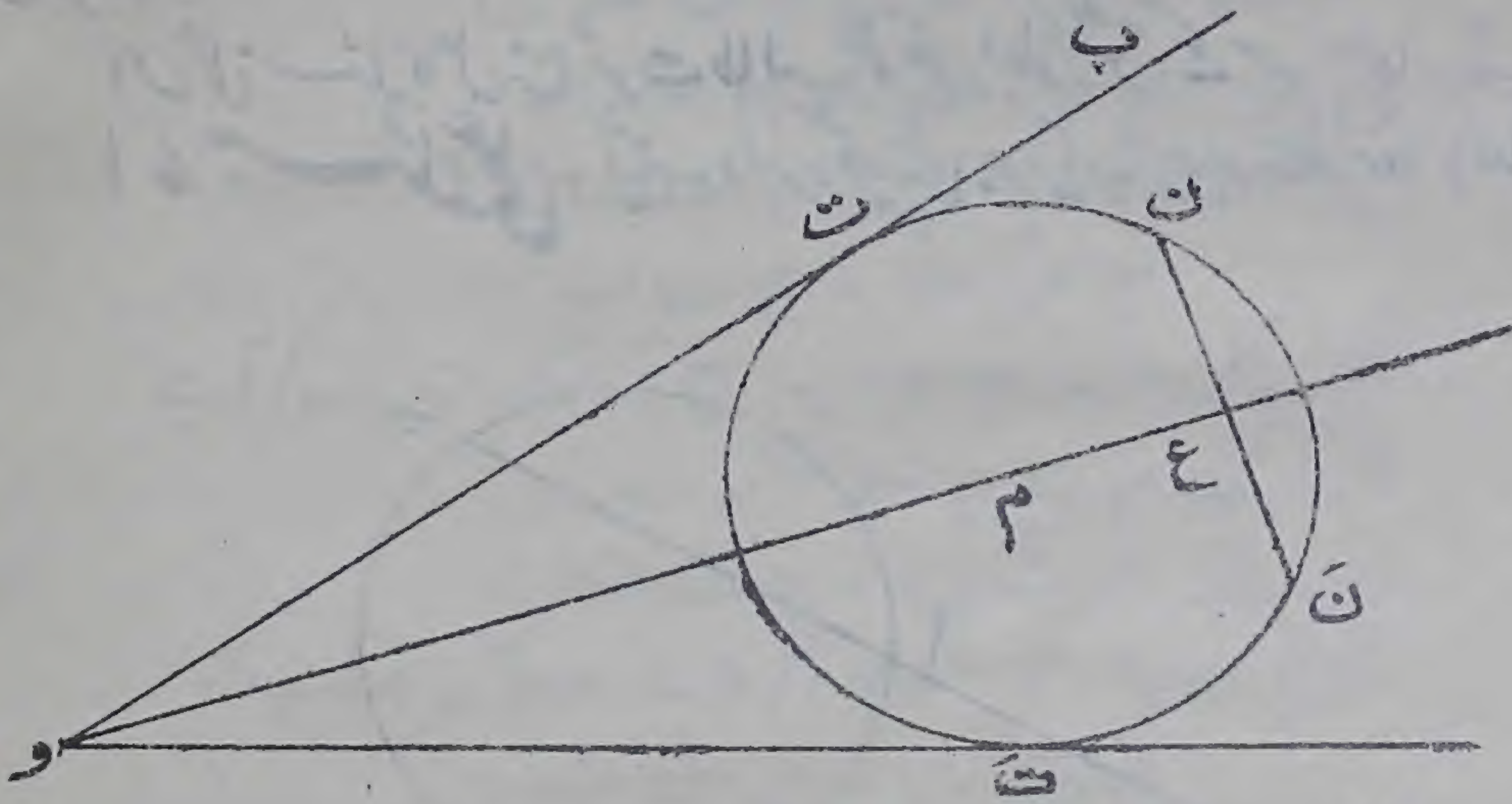
تب $وقت = وا \times وب$ جو معلوم ہے

اس لیے وقت معلوم ہو سکتا ہے اور اس کی مدد سے دیے ہوئے خط لاکھا اور مطلوبہ دائرہ کا نقطہ تماس حاصل ہوتا ہے۔ پس دائرہ اب ت مطلوبہ دائرہ ہے۔
نوٹ۔ چونکہ خط لاکھا پر و کی دوسری جانب ایک اور نقطہ ت بھی ایسا لیا جاسکتا ہے کہ وقت = وقت، اس لیے ایک اور دائرہ اب ت کھینچ سکتا ہے جو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔

طالب علم اس تحلیل کی بناء پر عمل حاصل کرے اور ثبوت بہم پہنچائے۔

مسئلہ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو دو دیے ہوئے متقاطع خطوط

۱ و ۲ کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ ن میں سے گزرے۔



تحلیل۔ فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے۔ چونکہ دائرہ (م) خطوط ۱ و ۲

اور وہ کوس کرتا ہے، اس لیے اس کام کے ان خطوط کے درمیان زاویہ کے منصف پر ہے۔

ن سے و م پر عمود ن ع نکالو اور اس کو اتنا خارج کرو کہ وہ دائرہ (م) کے مرکز پر ملے۔

تب $ن ع = ع ن$ ۔ پس ن معلوم ہو سکتا ہے۔
اور مطلوبہ دائرہ وہ دائرہ ہے جو نقطوں ن اور ن میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے خطوط میں سے کسی ایک کو مس کرتا ہے۔

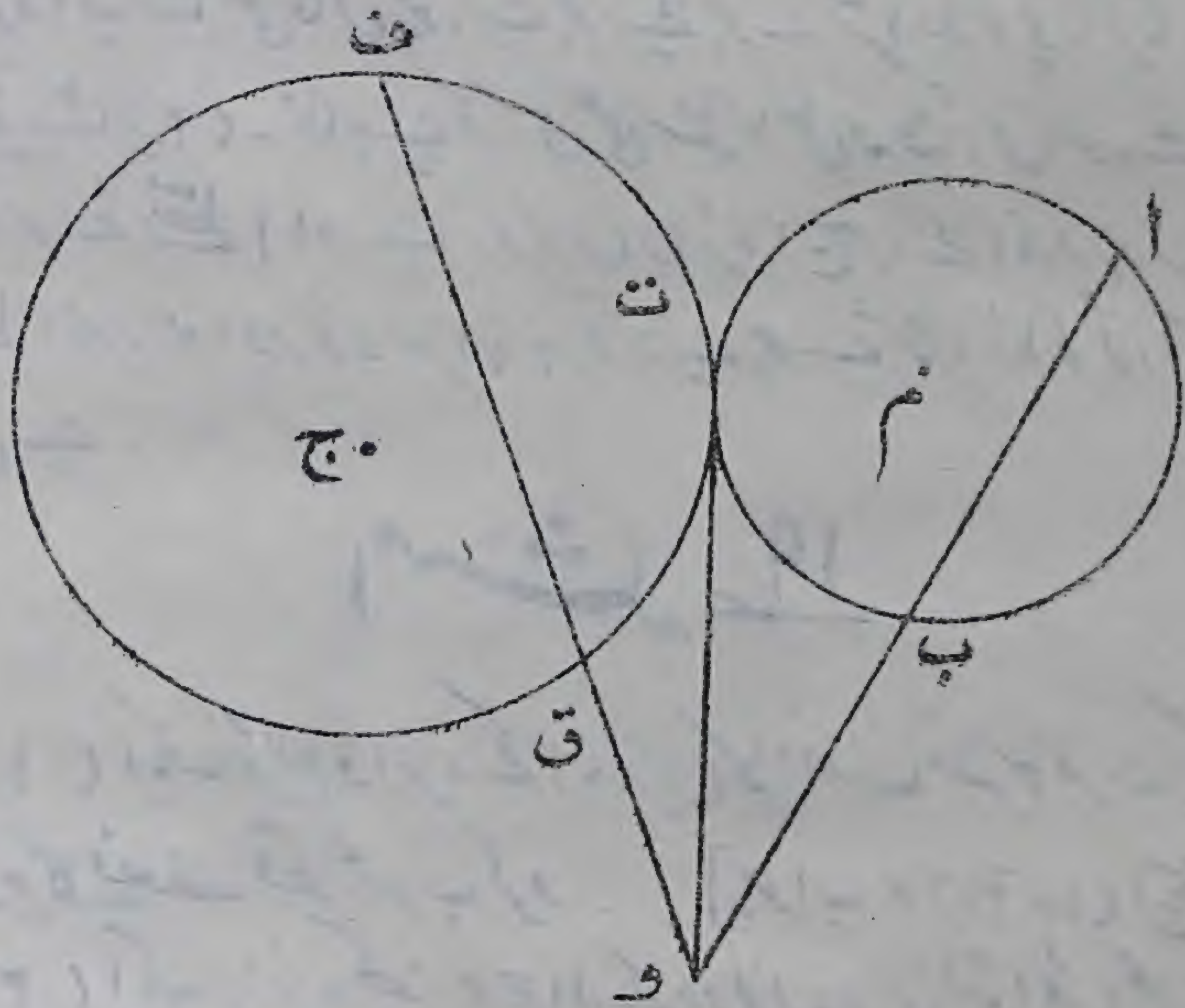
نوٹ (۱) چونکہ دو ایسے دائرے کھینچ سکتے ہیں جو ن اور ن میں سے گزرتے ہیں اور دیے ہوئے خطوط میں سے ایک کو مس کرتے ہیں اس لیے اس عملی مسئلہ کے دو حل ہیں۔

نوٹ (۲) اس صورت پر غور کرو جبکہ دیے ہوئے خط متوازی ہوں۔

نوٹ (۳)۔ اگر دیا ہوا نقطہ ن منصف و م پر ہو تو عمل کی تشریح کرو۔

۳۔ مسئلہ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ

(ج) کو مس کرے اور دو دیے ہوئے نقطوں ا اور ب میں سے گزرے۔



تخلیل۔ فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے جو دیے ہوئے دائرہ (ج) کو تیس کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ تین پرانے دائروں کا مشترک مماس خط اب سے وپر ملتا ہے۔

اب اگر وہیں سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ (ج) سے ف اور ق پر ملے تو $وف \times وق = و ت \times و ب$

پس معلوم ہوا کہ ا، ب، ف، ق مشترک المحيط نقطے ہیں۔
مترکیب۔ مندرجہ بالا تحلیل کی بنا پر مطلوبہ دائرہ کھینچنے کا عمل حسب ذیل حاصل ہوتا ہے۔

کوئی دائرہ کھینچو جو ا اور ب میں سے گزرے اور دیے ہوئے دائرہ (ج) کو ف اور ق پر قطع کرے۔ اب اور ف ق کے نقطہ تقاطع میں سے دیے ہوئے دائرہ (ج) کا مماس و ت کھینچو۔

تب ا، ب، ت میں سے گزرنے والا دائرہ دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔ طالب علم اس کا ثبوت خود بہم پہنچائے۔

نوٹ (۱)۔ و سے دائرہ (ج) کا ایک اور مماس و ت بھی کھینچ سکتا ہے اس لئے ایک اور دائرہ اب ت بھی حاصل ہوتا ہے جو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔

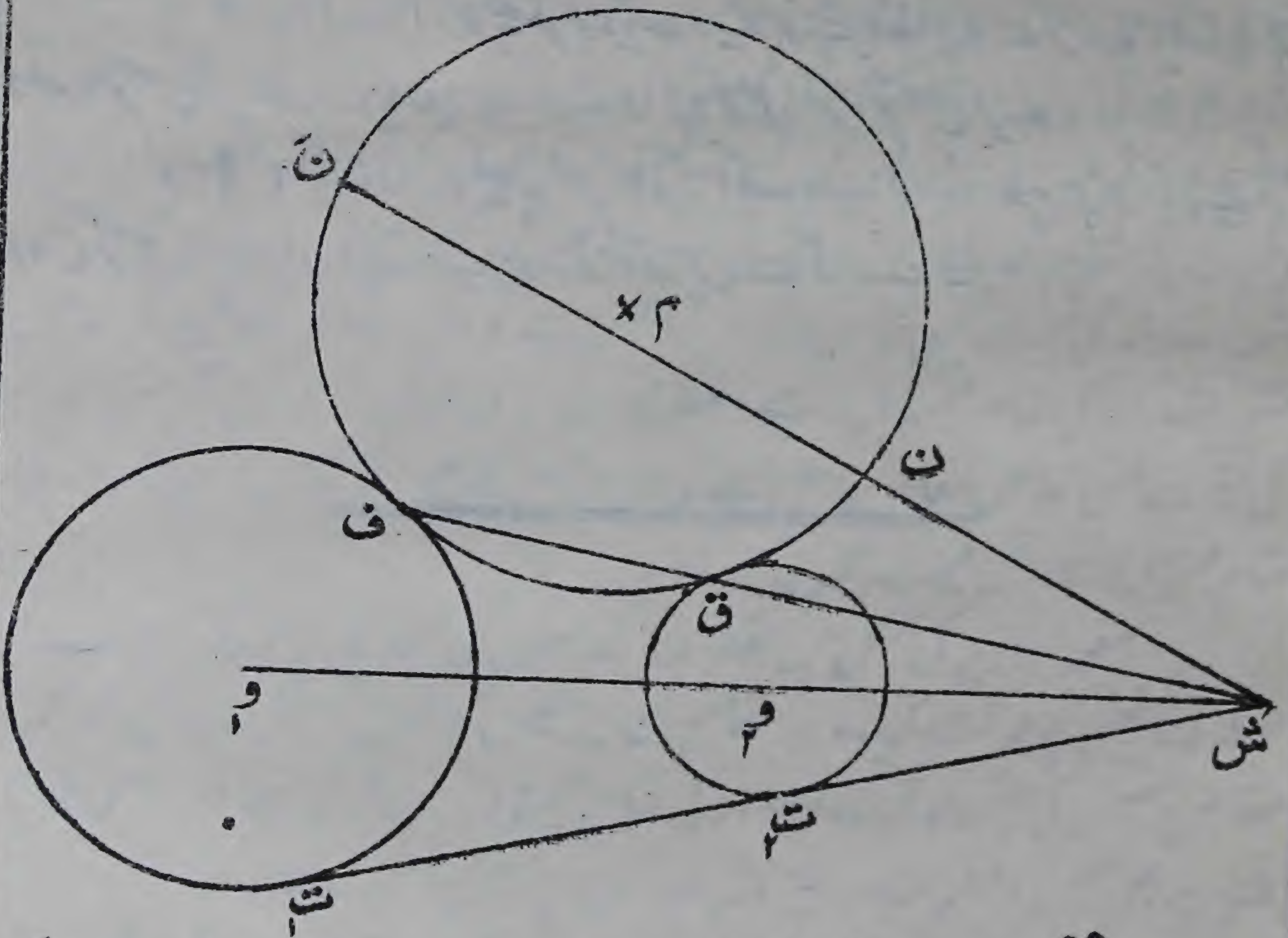
نوٹ (۲)۔ ظاہر ہے کہ اس عملی مسئلہ کا حل صرف اس صورت میں ممکن ہے جب کہ دیے ہوئے نقطے ۱ اور ب دونوں دائرہ (ج) کے اندر ہوں یا دونوں باہر۔ اگر ایک نقطہ اندر ہو اور دوسرا باہر تو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرنے والا دائرہ کھینچنا ناممکن ہے۔

مسئلہ ۱۹

(۱) ایک رُبع دائرہ کے اندر جس کا نصف قطر ۴ سم ہے ایک دائرہ بناؤ۔ اور اس دائرہ کا نصف قطر محسوب کرو [جواب ۴ (۱۴-۱) انچ]

(۲) ایک دائرہ کھینچو جو حوالہ کے دونوں (علی القوائم) محوروں کو مس کرے اور نقطہ (۲) میں سے گزرے۔ بتاؤ کہ ایسے دو دائرے کھینچ سکتے ہیں۔ ان دائروں کے

نصف قطر محسوب کرو۔ [جواب: - (۳) = ۱۶ (انچ)]
 (۳) ایک مساوی الاضلاع مثلث کے اندر تین دائرے بناؤ جن میں سے
 ہر ایک مثلث کے دو ضلعوں اور باقی دو دائروں کو مس کرے۔ دائرہ کے نصف قطر کا طول
 مثلث کے ضلع کے طول کی رقوم میں حاصل کرو۔ [جواب: - ۳۱ - ۱ x ۱]
 (۴) ۵ سمر نصف قطر والے دائرے کے اندر تین دائرے بناؤ جن میں سے
 ہر ایک دیے ہوئے دائرہ کو اور نیز باقی دو دائروں کو مس کرے۔ اگر ان تین دائروں
 میں سے ایک کا نصف قطر ۵ سمر ہو تو ثابت کرو کہ $۱ + ۱۰ = ۵$
 (۵) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے خطوط کو مس کرے اور ایک
 دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے۔
 (۶) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے دائروں (۱) اور (۲) کو خارجاً
 مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ (۳) میں سے (جو دائروں کے باہر ہے) گزرے۔



[تخلیل - فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (۴) ہے جو دیے ہوئے دائروں کو

ف اور ق پر مس کرتا ہے۔ خط ف ق مرکزوں کے خط و و سے سیدھی مشابہت کے مرکز ش پر ملتا ہے (دیکھو مسئلہ ۱۴ سوال ۳)۔ فرض کرو کہ دیے ہوئے دائروں کا ایک راست مشترک مماس ت ت ہے یہ مماس سیدھی مشابہت کے مرکز ش میں سے گزرتا ہے۔

اور ش ج ف \times ش ق = ش ت \times ش ت (دیکھو مسئلہ ۱۴ سوال ۴)
فرض کرو کہ ش ن مطلوبہ دائرہ سے مرکز ن پر ملتا ہے۔

تب ش ن \times ش ت = ش ف \times ش ق = ش ت \times ش ت۔ اس لیے ن ت ت ت مشترک المحيط ہیں۔ اس بنا پر نقطہ ن معلوم ہو سکتا ہے پس وہ دائرہ جو معلومہ نقطوں ن اور ت میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے دائروں میں سے کسی ایک کو خارجاً مس کرتا ہے دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔

(۷) سوال بالائی مدد سے ایک دائرہ کیجیو جو تین دیے ہوئے دائروں کو خارجاً مس کرے۔

(۸) ایک دائرہ کیجیو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو غلی القوائم قطع کرے۔
(۹) ایک دائرہ کیجیو جس کا مرکز ایک دیے ہوئے خط پر ہو جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے۔

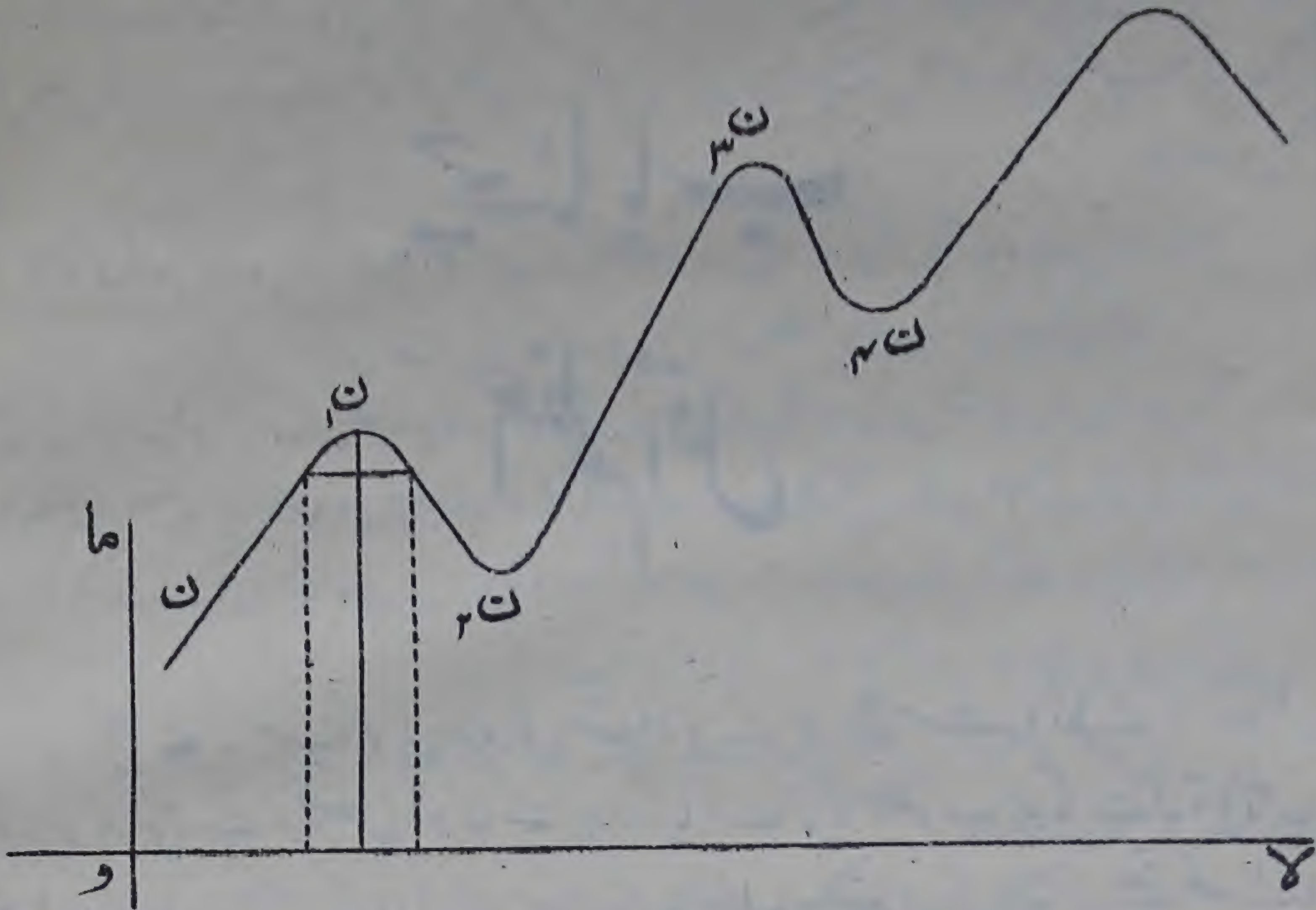
چھٹا باب

اعظم اقل

ہم ۷۔ جب کوئی ہندسی مقدار دیے ہوئے شرائط کے ماتحت مسلسل طور پر بدلتی ہے تو بعض اوقات یہ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے کہ آیا اس تبدیلی کے دوران میں کوئی ایسے مقام ہیں جہاں یہ مقدار بڑھتے بڑھتے گھٹنا شروع ہوتی ہے یا گھٹتے گھٹتے بڑھنا شروع ہوتی ہے۔ اگر ایسے مقام ہوں تو اول الذکر نوعیت کے مقام کے لیے متغیر مقدار کی قیمت کو اعظم قیمت اور آخر الذکر نوعیت کے مقام کے لیے اس کی قیمت کو اقل قیمت کہتے ہیں۔ بالفاظ دیگر اگر کسی متغیر مقدار کی قیمت کسی خاص مقام پر اعظم ہے تو اس مقام کے عین قرب میں متغیر مقدار کی تمام قیمتوں سے اعظم قیمت بڑی ہوگی۔ اسی طرح اگر متغیر مقدار کی قیمت کسی خاص مقام پر اقل ہے تو اس مقام کے عین قرب میں متغیر مقدار کی تمام قیمتوں سے اقل قیمت چھوٹی ہوگی۔

صفحہ ۱۱۴ پر کی شکل میں نقطہ ن کے معین کی تبدیلی پر غور کرو جب کہ نقطہ ن منحنی پر حرکت کرے۔ مقام ن پر معین کا طول اعظم ہے کیونکہ اس مقام پر معین کی قیمت قرب و جوار کی تمام قیمتوں سے بڑی ہے اور اسی طرح ن پر بھی معین اعظم ہے۔ نیز ن اور ن پر معین اقل ہے۔ واضح رہے کہ بالعموم اعظم قیمت سے مراد بڑی سے بڑی قیمت

نہیں ہوتی ہے۔



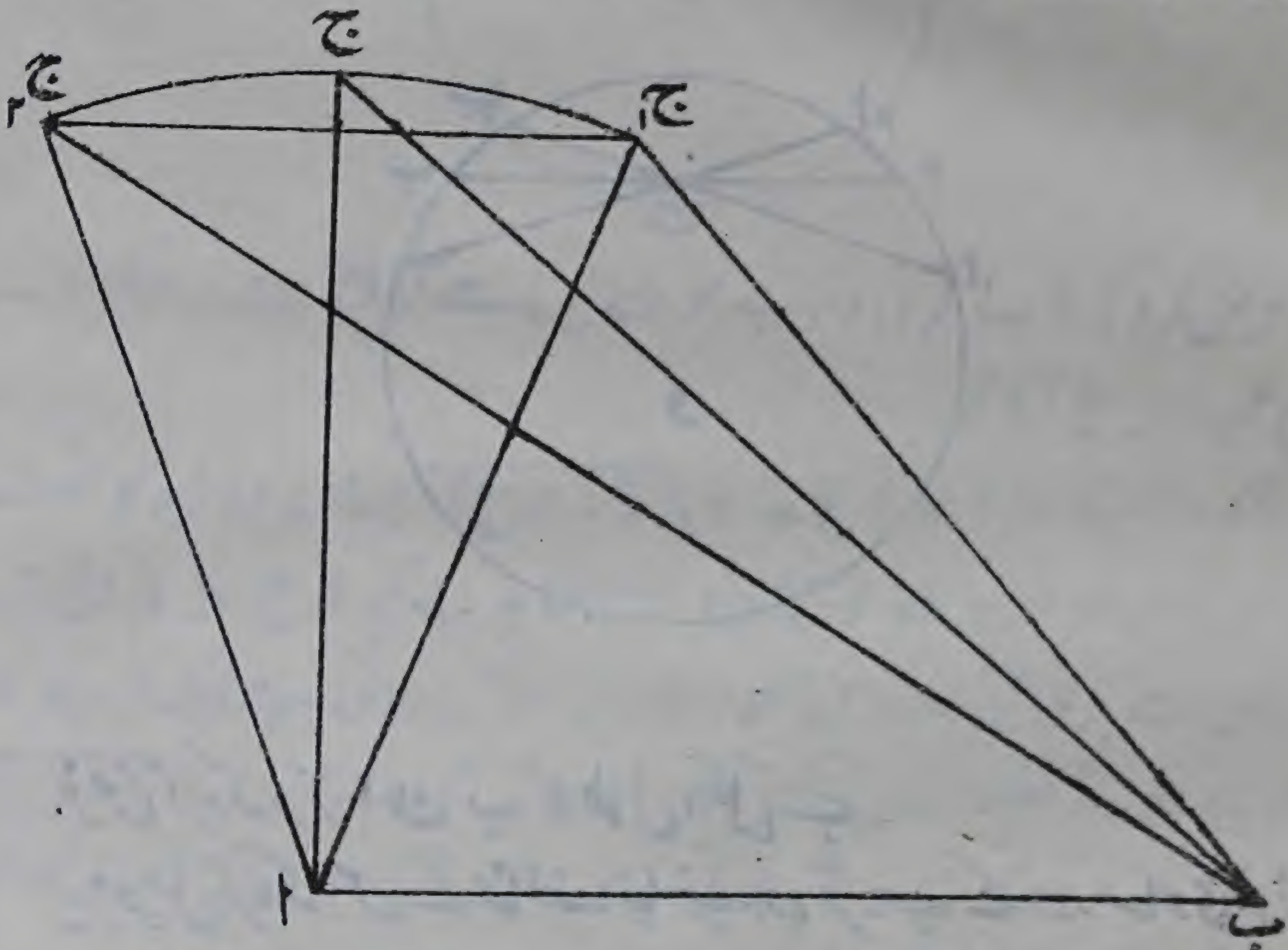
مثلاً شکل بالا میں N پر معین اعظم ہے لیکن یہ قیمت معین کی قیمتوں میں سب سے بڑی نہیں ہے۔ چنانچہ N پر کا معین جو اقل ہے N پر کے معین سے جو اعظم ہے بڑا ہے۔ اسی طرح یہ ضروری نہیں ہے کہ اقل قیمت متغیر مقدار کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہو۔

اس باب میں ہم صرف ایسی تبدیلیوں پر غور کریں گے جن میں متغیر مقدار صرف ایک مرتبہ اعظم یا اقل قیمت اختیار کرتی ہے۔ ایسی صورتوں میں اعظم قیمت درحقیقت بڑی سے بڑی قیمت ہے اور اقل قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہے۔
۵۔ بالعموم اعظم یا اقل قیمتوں کی تحقیق میں مندرجہ ذیل اشارے کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

(۱) مقدار متغیر کی دو مساوی قیمتوں کے درمیان کم از کم ایک اعظم یا اقل قیمت ہوگی جو شکل بالا سے واضح ہے۔
مثلاً مقدار متغیر کی اعظم یا اقل قیمت یہ فرض کرنے سے دریافت کی جاتی ہے کہ

اس مقام کے مخالف جانب قریب کے دو مقامات کے لیے متخیر مقدار کی قیمتیں مساوی ہیں اور بالآخر یہ مساوی قیمتیں اعظم یا اقل قیمت پر منطبق ہو جاتی ہیں۔
(۲) عموماً مقام تشاکل پر اعظم یا اقل قیمت واقع ہوتی ہے۔
۴۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کے دو ضلع دیے ہوئے ہوں تو مثلث

کا رقبہ اعظم ہو گا جب کہ ان ضلعوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہو۔
فرض کرو کہ مثلث ABC کے اضلاع AB ، AC دیے گئے ہیں۔
نیز فرض کرو کہ ضلع AB کا مقام ثابت ہے۔ تب AC کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز A ہے اور جس کا نصف قطر دیے ہوئے ضلع AC کا طول ہے۔



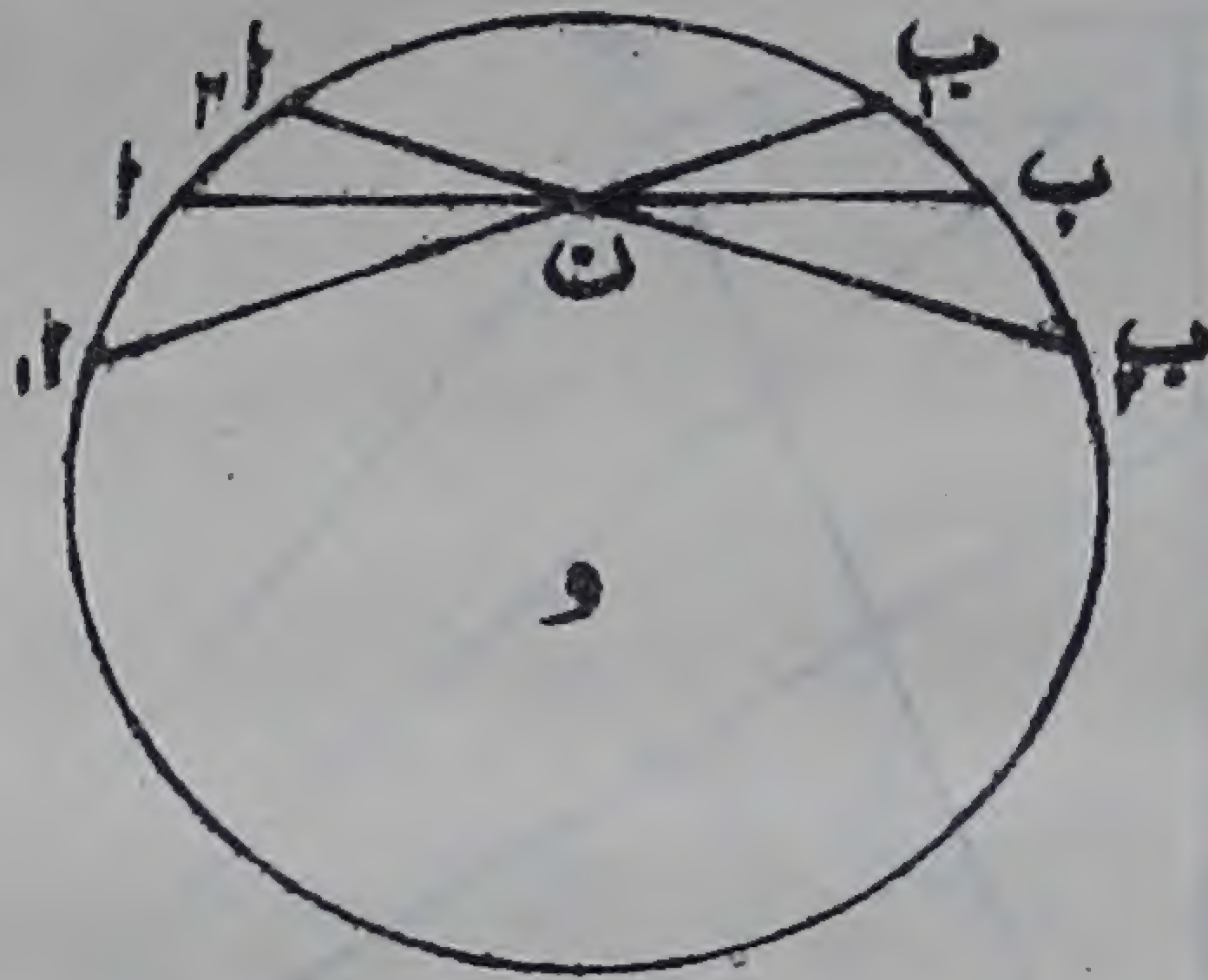
فرض کرو کہ اس کے مقام AC کے لیے مثلث ABC کا رقبہ اعظم ہے۔
اس مقام کے مخالف جانب AC کے طریق پر دو قریب کے نقطے C اور C' ایسے لو کہ مثلثات ABC اور ABC' کے رقبے مساوی ہوں۔ تب AC // AC' کے جب AC اور AC' دونوں ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں تو AC // AC' سے گزرنے والا خط نقطہ C پر کا ماس ہو گا اس لیے اگر AC کا رقبہ اعظم ہے تو AC پر دائرہ (۱) کا محاس قاعدہ AB کے متوازی ہو گا۔

یعنی ج ا ب = قائمہ زاویہ یہی ثابت کرنا تھا۔
نوٹ۔ ۵ = $\frac{1}{4}$ ب ج جب ا میں ب، ج مستقل ہیں۔ اس لیے ۵ اعظم
ہوگا جبکہ جب ا اعظم ہو۔

یعنی آ = ۹۰° اور اعظم رقبہ = $\frac{1}{4}$ ب ج

۷۔ مسئلہ۔ ایک دیے ہوئے دائرہ (و) کے اندر کے ایک

ثابت نقطہ ن میں گزرنے والے تمام وتروں میں اس وتر کا طول اقل ہوتا ہے
جس کی تنصیف نقطہ ن پر ہوتی ہے۔



فرض کرو کہ وتر ا ن ب کا طول اقل ہے۔
نیز فرض کرو کہ اس کے مخالف جانب دو قریب کے اور مساوی طول والے
وتر ا ن ب، ا م ن ب ہیں۔

چونکہ ا ب = ا م ب م

اس لیے قطعہ ا ا ب کا رقبہ = قطعہ ا م ب کا رقبہ
یعنی ۵ ا ن ا م = ۵ ب ن ب م [کیونکہ ا ن ا م اور ب ن ب م
ا ا سے گھرا ہوا رقبہ تقریباً مساوی ہے ۵ ا ن ا م کے رقبہ کے]۔
لیکن ان مثلثات کے مشترک رأس ن پر کے زاویے مساوی ہیں

اس لیے ن ا ا م × ن ا م = ن ب ب م × ن ب م

انہما میں تقاطع اور ام دونوں پر منطبق ہوتے ہیں اور ب اور ب

دونوں ب پر

اس لیے $ا = ن ب$ یعنی $ا = ن ب$ یعنی اقل وتر ا ب کی
تتصیف دیے ہوئے نقطہ ن پر ہوتی ہے۔ یہی ثابت کرنا تھا۔
نوٹ۔ اس مسئلہ کو ذیل کے طریقہ سے بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔



فرض کرو کہ ا ب کوئی وتر ہے جو ن میں سے گزرتا ہے۔ مرکز و سے

ا ب پر عمود و ع نکالو۔

تب $ا ب = ۲ \times ا ع = ۲ \times ۲ = ۴$ ۔ و ع ا جہاں دائرہ کا نصف قطر

ہے۔ نیز قائمہ الزاویہ $\Delta و ع ن$ سے ظاہر ہے کہ و ع \perp ا ب اور اس لیے
و ع کی بڑی سے بڑی قیمت اس صورت میں حاصل ہوتی ہے جبکہ ا ب کا وسطی
نقطہ ع دیے ہوئے نقطہ ن پر منطبق ہو۔ اور اس صورت میں $۲ \times و ع = ا ب$ کی
قیمت یعنی ا ب کی قیمت اقل ہوتی ہے۔ پس ثابت ہوا کہ ا ب کا طول اقل
ہوتا ہے جبکہ ا ب کا وسطی نقطہ ن ہو۔

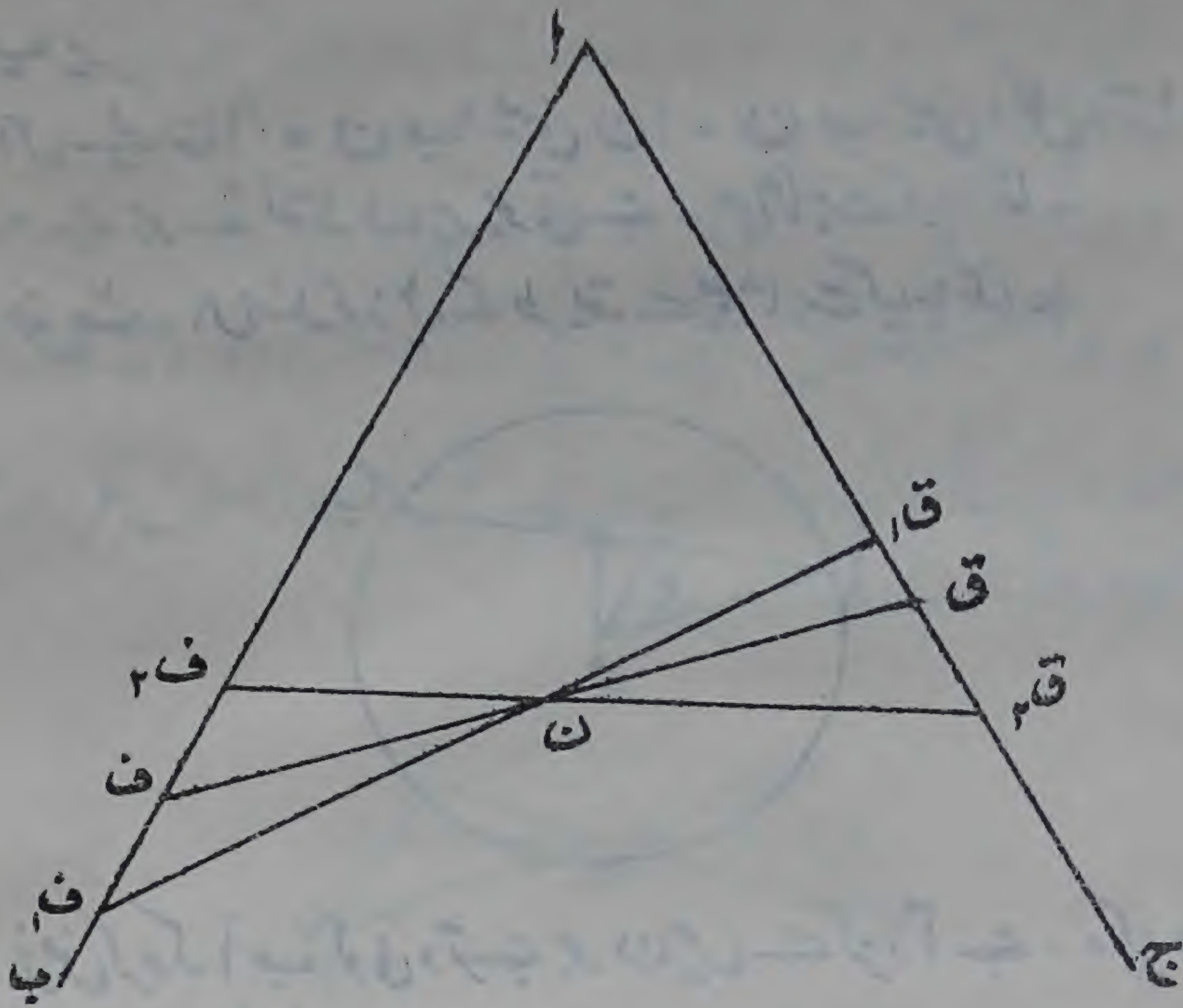
مشق۔ شکل بالا میں ثابت کرو کہ وتر ا ن ب دائرہ سے اقل رقبہ والا

قطعہ صغیر اور اعظم رقبہ والا قطعہ کبیر قطع کرتا ہے۔

۸۔ دو متقاطع خطوط ا ب، ا ج دیے گئے ہیں۔ اور ب ا ج

کے اندر ایک ثابت نقطہ ن ہے۔ اگر ن میں سے گزرنے والا کوئی خط
خطوط ا ب، ا ج سے ف اور ق پر ملے تو مثلث ف ا ق کا رقبہ اقل ہوگا
جبکہ ف ق کی تتصیف ن پر ہو۔

فرض کرو کہ Δ ا ف ق کا رقبہ اقل ہے۔ فرض کرو کہ ف ق کے



مخالف جانب ن میں سے گزرنے والے دو قریب کے خط ف ن ق اور ف ن ق ایسے ہیں کہ مثلث ف ا ق کا رقبہ = مثلث ف ب ا ق کا رقبہ تب مثلث ف ن ق = مثلث ق ن ق اور ان مثلثات کے مشترک رأس ن پر کے زاویے مساوی ہیں۔

اس لیے $ف ن \times ق ن = ف ن \times ق ن$ اور انہما میں جب ف ق اور ف ق دو نوں خط ف ق پر منطبق ہوتے ہیں تو $ف ن = ق ن$ یعنی ن = ق۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

۹۔ ذیل میں اعظم اقل قیمتوں کی تحقیق کے خالص ہندی طریقوں کی تشریح کی جائیگی۔

مسئلہ۔ اگر ایک لامحدود خط ج د کی ایک ہی جانب کے دو ثابت نقطوں ا اور ب کو خط پر کے کسی نقطہ ن سے ملایا جائے تو ان اور ب ن کا مجموعہ اقل ہوگا جبکہ یہ خطوط دیے ہوئے خط ج د کے ساتھ مساوی زاویے

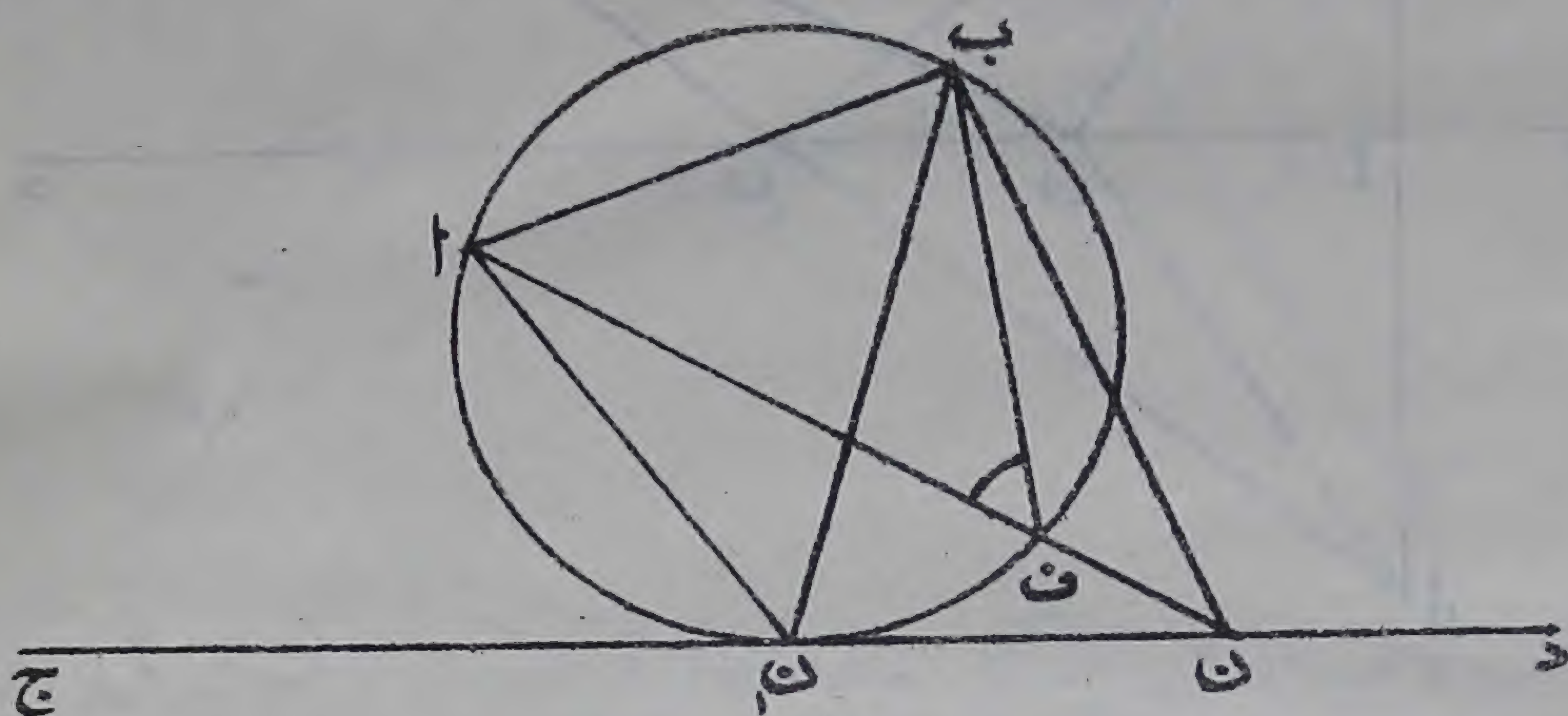
The diagram illustrates the construction of a hyperbola. Two intersecting lines, labeled AB and CD , intersect at point E . A circle is drawn with center E and radius EA . The circle intersects line AB at points A and B , and line CD at points C and D . The hyperbola is constructed by drawing two branches that pass through points A and C , and B and D . The asymptotes of the hyperbola are the lines AB and CD .

واقع ہوں اور جہ پر کوئی نقطہ نہ ہو تو ثابت کرو کہ ان سب بے عظمت ہوگا

جبکہ یہ خط دیے ہوئے خط ج د سے مساوی زاویے بنائیں۔

۸۔ مسئلہ۔ ایک لامحدود ثابت خط ج د کی ایک ہی جانب

دو ثابت نقطے اور ب ہوں اور خط ج د پر کوئی متحرک نقطہ ن ہو تو ا ن ب
اعظم ہوگا جبکہ دائرہ ا ن ب دیے ہوئے خط ج د کو مس کرے۔



ایک دائرہ کھینچو جو اب میں سے گزرے اور ج د کو مس کرے۔ فرض کرو کہ نقطہ تماس ن ہے۔

ج د پیر کوئی دوسرا نقطہ نہ ہو۔

ثابت کرنا ہے کہ $\hat{A} \hat{B} \hat{A}$ بڑا ہے $\hat{A} \hat{B}$ سے

فرض کرو کہ ان دائرہ کوف پر قطع کرتا ہے۔

ف ب کو ملاؤ۔

ا ن ب = ا ف ب جو بڑا ہے ا ن ب سے یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ۔ ۱۔ ب میں سے گزرنے والے اور خط ج د کو مس کرنے والے دو

دائرے کھینچ سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ دوسرا دائرہ خط ج د کو لمب میس کرتا ہے اس صورت

میں بھی ان ب اعظم ہوگا۔ پس ان ب کی دو اعظم قیمتیں ہیں جون کے مقامات

ن اور ن کے لیے حاصل ہوتی ہیں واضح ہو کہ بالعموم یہ دو قیمتیں مساوی نہ ہونگی۔
اگر ب ا ج د سے لا پر لے تو متحرک نقطہ ن کے مقام لا کے لیے ا ن ب
کی قیمت صفر ہے، جو زاویہ ا ن ب کی اقل قیمت ہے۔
پس ضمناً معلوم ہوا کہ دو اعظم قیمتوں کے درمیان کم از کم ایک اقل
قیمت واقع ہوتی ہے۔

۸۱۔ ذیل میں اعظم اقل قیمتوں کی تحقیق کے چند ایسے مسائل درج
کیے جاتے ہیں جو جبریہ متشاکلات کی مدد سے باسانی حاصل ہوئے ہیں۔
مسئلہ۔ اگر ایک دیے ہوئے محدود خط ا ب پر کوئی نقطہ ن
ہو تو ا ن x ن ب اعظم ہوگا جبکہ ن وسطی نقطہ ہو ا ب کا۔

فرض کرو کہ ا ن = لا اور ن ب = ما
از روئے سوال لا + ما مستقل ہے

اب ذیل کے متشاکلہ پر غور کرو م لا ما = (لا + ما) - (لا - ما)
ہمیں لا ما کی اعظم قیمت معلوم کرنا ہے اس صورت میں م لا ما بھی اعظم ہوگا۔
چونکہ اوپر کے متشاکلہ میں (لا + ما) مستقل ہے اس لیے م لا ما اعظم ہوگا
جبکہ (لا - ما) (جو منفی نہیں ہو سکتا) اپنی چھوٹی سے چھوٹی قیمت یعنی صفر
صفر اختیار کرے۔

یعنی جبکہ لا = ما

یعنی ا ن = ن ب یہی ثابت کرنا تھا۔

۸۲۔ **مسئلہ**۔ اگر ایک دیے ہوئے محدود خط ا ب پر کوئی
نقطہ ن ہو تو ا ن + ن ب اقل ہوگا جبکہ ن وسطی نقطہ ہو ا ب کا۔
فرض کرو کہ ا ن = لا اور ن ب = ما
از روئے سوال لا + ما مستقل ہے

اب ذیل کے متشاکلہ پر غور کرو۔

$$۲ (لا + ما) = (لا + ما) + (لا - ما)$$

بائیں جانب میں (لا + ما) مستقل ہے اور (لا - ما) منفی نہیں ہو سکتا ہے

اس لیے ۲ (لا + ما) کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہوگی جبکہ بائیں جانب کی دوسری رقم (لا - ما) اپنی چھوٹی سے چھوٹی قیمت صفر اختیار کرے یعنی جبکہ لا = ما

یعنی ان = ن ب جو ثابت کرنا تھا۔

مسئلہ ۲۰

(۱) ایک دیے ہوئے ثابت نقطہ سے ایک دیے ہوئے ثابت خط تک خطوط کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان خطوط میں سے سب سے چھوٹا خط وہ ہے جو دیے ہوئے خط پر عمود ہے۔

(۲) ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک دیے ہوئے دائرہ کے محیط تک کھینچے ہوئے خطوط میں سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے وہ خط ہیں جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرتے ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ دائرہ کا بڑے سے بڑا وتر اس کا قطر ہے۔

(۴) مستقل محیط والے مستطیلوں میں سب سے بڑے رقبہ والا مستطیل مربع ہے۔

(۵) ایک مثلث کا قاعدہ اور اسی زاویہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ اعظم ہوگا جبکہ مثلث متساوی الساقین ہو۔

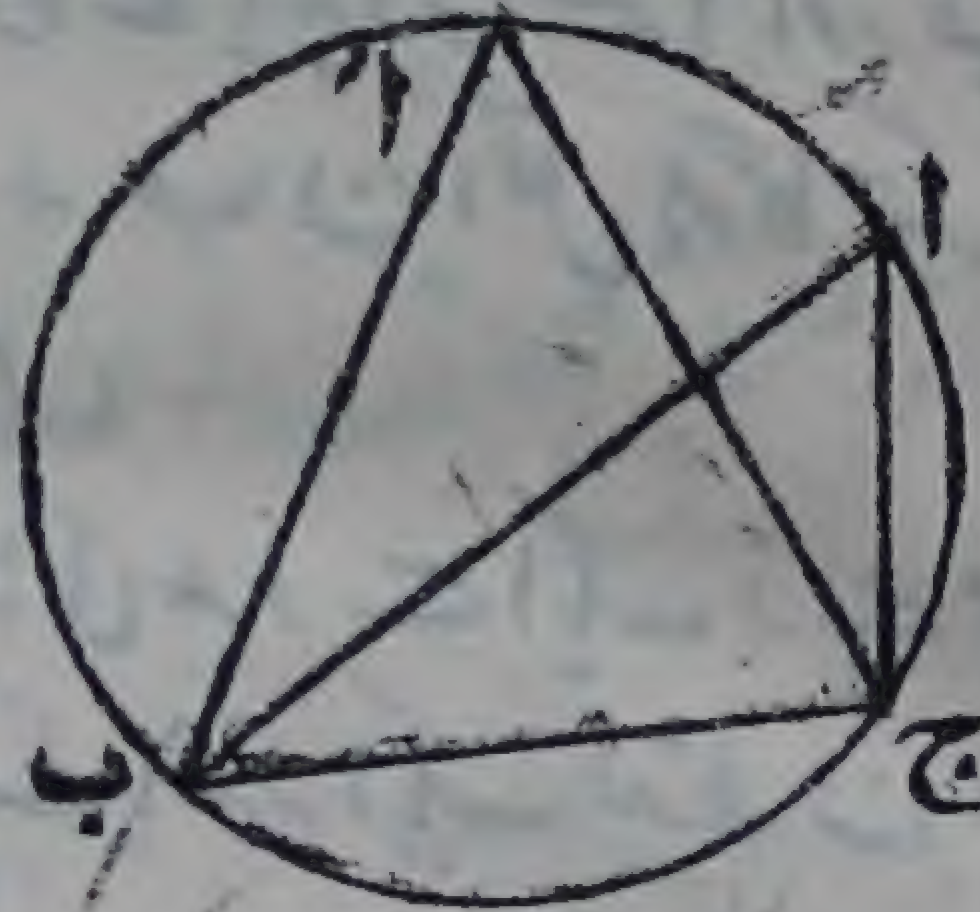
(۶) مستقل رقبہ والے مستطیلوں میں سب سے چھوٹے احاطہ والا مستطیل مربع ہے۔

(۷) مستقل رقبہ والے مستطیلوں میں سب سے چھوٹے وتر والا مستطیل مربع ہے۔

(۸) ثابت کرو کہ ان سب مثلثوں میں جن کا قاعدہ اور رقبہ معلوم ہے مثلث متساوی الساقین کا محیط اقل ہے۔

(۹) دو سیدھی پٹریاں ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں اور ایک سیدھی سلاخ ان کے درمیان پھسلتی ہے بتاؤ کہ پھسلنے والی سلاخ کے کس مقام کے لیے

پیرایوں اور سلاخ سے بننے والے مثلث کا رقبہ اعظم ہے۔
 (۱۰) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر بنے ہوئے
 مثلثوں میں سب سے بڑے رقبہ والا مثلث مساوی الاضلاع ہے۔
حل۔ فرض کرو کہ دیے ہوئے دائرہ (و) کے اندر بنا ہوا کوئی مثلث
 اب ج ہے جو مساوی الاضلاع نہیں ہے۔ فرض کرو کہ اب Δ ج۔
 ج۔



تب راس ا کو قوس ب ج کے وسطی نقطہ آ پر لینے سے دائرہ کے اندر
 بنا ہوا Δ اب ج حاصل ہوتا ہے جس کا رقبہ بڑا ہے Δ اب ج کے
 رقبہ سے۔ یعنی دائرہ کے اندر بنے ہوئے مثلث کے رقبہ میں اضافہ ممکن ہے
 اگر مثلث مساوی الاضلاع نہ ہو۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ دائرہ کے اندر
 بنے ہوئے مثلثوں میں اعظم رقبہ والا مثلث مساوی الاضلاع ہے۔

نوٹ۔ مندرجہ بالا استدلال میں دائرہ کے اندر بنے ہوئے مساوی الاضلاع
 مثلث کے رقبہ کا مقابلہ دائرہ کے اندر بنے ہوئے ایسے مثلث سے جو مساوی الاضلاع
 نہ ہو نہیں کیا گیا ہے بلکہ یہ ثابت کیا گیا ہے کہ مثلث کے رقبہ میں اضافہ ممکن ہے اگر
 مثلث مساوی الاضلاع نہ ہو۔

یہ نہایت ضروری ہے کہ اس استدلال کی نوعیت کو طالب علم اچھی طرح سمجھے۔
 (۱۱) ایک پل کی تین گمانیں ہیں جن میں سے ہر ایک کا عرض ۵ فٹ
 ہے۔ بتاؤ کہ پل سے کتنے فاصلہ پر کسی ایک کنارے پر وہ نقطہ ہے جہاں
 درمیانی کمان کے محاذی اعظم زاویہ بنتا ہے [جواب ۵.۴۴ فٹ]
 (۱۲) ان تمام مثلثوں میں جو ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر

بن سکتے ہیں مثلث مساوی الاضلاع کا محیط اعظم ہے۔
(۱۳) اُن تمام مثلثوں میں جو ایک مثلث کے اندر بن سکتے ہیں مثلث پانچ کا احاطہ اقل ہے۔

(۱۴) ایک مثلث کا قاعدہ اور اُسی زاویہ معلوم ہیں ثابت کرو کہ مثلث کے باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں پر کا مجموعہ اعظم ہوگا جبکہ مثلث متساوی الساقین ہو۔
(۱۵) ایک دائرہ کے باہر دو نقطے ۱ اور ۲ ہیں اور دائرہ پر کوئی نقطہ ۳ ہے ثابت کرو کہ ۱ + ۲ + ۳ اقل ہوگا جبکہ یہ خطوط ۱ پر کے مماس کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں۔

(۱۶) مثال بالا کی مدد سے ایک دیے ہوئے مثلث ۱ ب ج (جس کے سب زاویے حادہ ہیں) کے اندر ایک نقطہ ۴ ایسا معلوم کرو کہ ۱ + ۲ + ۳ اقل ہو۔

(۱۷) ایک ذواربعتہ الاضلاع کے چاروں ضلعے بلحاظ طول اور ترتیب دیے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ذواربعتہ الاضلاع کا رقبہ اعظم ہوگا جبکہ ذواربعتہ الاضلاع مشترک المحيط ہو۔

ساتواں باب

چلیبی نسبت موسیقی صفا اور موسیقی منیل

(۸۳) جدید علم ہندسہ میں ایک خط مستقیم پر طولوں کی پیمائش میں سمت پیمائش کو بھی ملحوظ رکھا جاتا ہے۔ اگر ایک سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں کو مثبت قرار دیا جائے تو مخالف سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں کو منفی قرار دیا جائیگا۔ پس اگر خط پر ۱ اور ۲ دو نقطے ہوں تو $۱ - ۲ = ۱$ اور $۲ - ۱ = ۱$ جس سے حاصل ہوتا ہے کہ $۱ - ۲ = ۱$ اور $۲ - ۱ = ۱$ ۔ اگر ایک خط مستقیم پر تین نقطے ۱، ۲، ۳ ہوں تو

$۱ - ۲ + ۳ = ۱$ اور $۲ - ۱ + ۳ = ۲$ ۔ نیز اگر دو نقطوں ۱ اور ۲ میں سے گزرنے والے خط پر کوئی نقطہ ۳ ہو تو $۱ - ۲ + ۳ = ۱$ اور $۲ - ۱ + ۳ = ۲$ ۔

۱ ————— ۲

۱ ————— ۲

۱ ————— ۲

مسئلہ - اگر خط مستقیم کا وسطی نقطہ م ہو اور خط پر کوئی نقطہ
و ہو تو $۲ و م = و ا + و ب$



ثبوت - چونکہ $ا م = م ب$
اس لیے $و م - و ا = و ب - و م$
اس لیے $۲ و م = و ا + و ب$

۸۵ - تعریف - متحدہ ہم خط نقطوں کو نقطوں کی صف

کہتے ہیں۔ مسئلہ - اگر 'ا' 'ب' 'ج' 'د' چار نقطوں کی ایک صف ہو تو

$$ا ب \times ج د + ب ج \times ا د + ج ا \times ب د = ۰$$



$$ا ب \times ج د + ب ج \times ا د + ج ا \times ب د$$

$$= ا ب (ا د - ا ج) + ا ج (ا ب - ا د) + ا د (ا ج - ا ب) = ۰$$

نوٹ - یہ مسئلہ درست ہے خواہ 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ایک خط پر کسی ترتیب میں لیے جائیں۔

۸۶ - تعریف - اگر 'ا' 'ب' 'ج' 'د' چار نقطوں کی ایک صف ہو تو

نسبت $\frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب}$ کو صف 'ا ب ج د' کی چلیبی نسبت کہتے ہیں اور

اس کی قیمت کو علامت (ا ب ج د) سے تعبیر کرتے ہیں۔

نوٹ - صف 'ا ب ج د' کی چلیبی نسبت کو لکھنے اور یاد رکھنے کے لئے

ایک دائرہ پر نقاط 'ا' 'ب' 'ج' 'د' کو سلسلہ وار سمت ساعت میں لکھو۔ شمار کنندہ

حاصل کرنے کے لیے 'ا' سے شروع کر کے حروف کو سمت ساعت میں لکھو



اور نسب نما حاصل کرنے کے لیے ا سے شروع کر کے حروف کو مخالف سمت ساعت میں لکھو۔
۸۷۔ مسئلہ۔ اگر (ا ب ج د) = (ا ب ج ع) تو نقاط د اور

ع ایک دوسرے پر منطبق ہونگے۔

چونکہ (ا ب ج د) = (ا ب ج ع)

$$\therefore \frac{ا ب \times ج د}{د \times ج ب} = \frac{ا ب \times ج ع}{ع \times ج ب}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{ج د}{د ب} = \frac{ج ع}{ع ب}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{ج د}{د} = \frac{ج ع}{ع}$$

یعنی ج ا کی تقسیم ایک ہی نسبت میں نقاط د اور ع پر ہوتی ہے
 اس لیے ضروری ہے کہ د اور ع ایک دوسرے پر منطبق ہوں۔

۸۸۔ مسئلہ

(۱) ا ب کا وسطی نقطہ ج ہے اور ا ب پر کوئی اور نقطہ
 ن ہے، ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ ان } \times \text{ ب } + \text{ ن } = \text{ ج } \times \text{ ب } = \text{ ج } \times \text{ ن}$$

$$(ب) \text{ اب } + \text{ ب } \times \text{ ن } = \text{ ا } \times \text{ ج } + \text{ ج } \times \text{ ن}$$

(۲) اب کا وسطی نقطہ ج ہے اور اب محدودہ پر کوئی نقطہ دے
ثابت کرو کہ $\text{اج} \times \text{ا} = \text{ج} \times \text{ب} + \text{ب} \times \text{د} + \text{ا} \times \text{ج}$

(۳) 'ا' 'ب' 'ج' 'ن' کوئی چار ہم خط نقطے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ن} \times \text{ا} \times \text{ج} + \text{ن} \times \text{ب} \times \text{ا} + \text{ن} \times \text{ج} \times \text{ب} + \text{ا} \times \text{ب} \times \text{ج} = \text{ا} \times \text{ب} \times \text{ن}$$

(۴) اگر (ا ب ج د) = ۱ تو

ثابت کرو کہ (ا ب ج د) کی قیمت نہیں بدلتی جبکہ کسی دو حروف کو باہم
بدلا جائے اور ساتھ ہی باقی دو حروف کو بھی باہم بدلا جائے یعنی

$$(ا ب ج د) = (ب ا د ج) = (ج د ا ب) = (د ج ب ا) = ۱$$

(۵) ثابت کرو کہ پہلے اور تیسرے حروف کو باہم بدلنے سے یا دوسرے
اور چوتھے حروف کو باہم بدلنے سے چلیبی نسبت کی قیمت الٹ جاتی ہے یعنی

$$(ا د ج ب) = (ب ج د ا) = (ج ب ا د) = (د ا ب ج) = \frac{1}{(ا ب ج د)}$$

(۶) ثابت کرو کہ دوسرے اور تیسرے حروف کو باہم بدلنے سے یا
پہلے اور چوتھے حروف کو باہم بدلنے سے چلیبی نسبت کی قیمت الٹ ہو جاتی ہے یعنی

$$(ا ج ب د) = (ب د ا ج) = (ج ا د ب) = (د ب ج ا) = ۱ - ۱$$

اشارہ۔ چونکہ $\text{ا} \times \text{ب} \times \text{ج} \times \text{د} + \text{ا} \times \text{د} \times \text{ب} + \text{ا} \times \text{ج} \times \text{د} = ۱$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ا} \times \text{ب} \times \text{ج} \times \text{د}}{\text{ا} \times \text{د} \times \text{ب}} + ۱ = \frac{\text{ا} \times \text{ج} \times \text{د}}{\text{ا} \times \text{ب} \times \text{ج}}$$

$$\text{اس لیے } ۱ - ۱ = \frac{\text{ا} \times \text{ج} \times \text{د}}{\text{ا} \times \text{ب} \times \text{ج}} = \frac{\text{ا} \times \text{ج} \times \text{د}}{\text{ا} \times \text{د} \times \text{ب}} = (ا ج ب د)$$

اسی طرح سے باقی کی تین چلیبی نسبتوں کے لیے بھی۔

(۷) ثابت کرو کہ

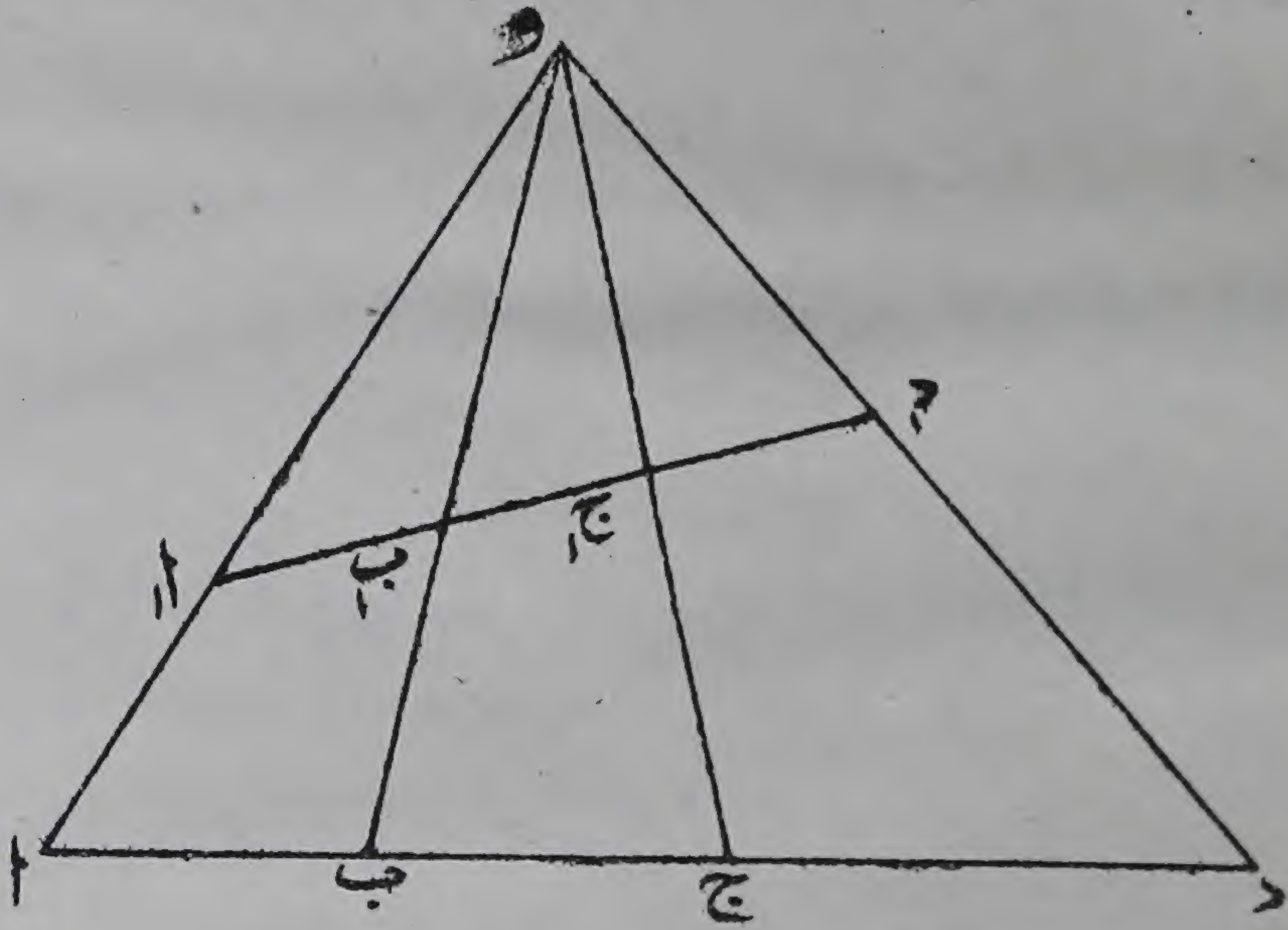
$$(۱) (ا د ب ج) = (ب ج ا د) = (ج د ا ب) = (د ا ب ج) = \frac{1}{(ا ج ب د)}$$

$$(ب) (ا ب د ج) = (ب ا ج د) = (ج د ب ا) = (د ج ا ب) = ۱ - \frac{۱}{(ا ج ب د)}$$

(ج) (اج دب) = (ب د ج ا) = (ج ا ب د) = (د ب ا ج) = لہذا
 (۸) ثابت کرو کہ چار ہم خط نقطوں ا، ب، ج، د کو مختلف ترتیبوں میں
 لینے سے ۲۴ چلیبی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں جن سے چار چار مساوی القیمت چلیبی
 نسبتوں کے چھ سٹ (Set) بنتے ہیں۔

۸۸۔ تعریفات۔ متعدد متراکز خطوں کو خطوں کی پنسل
 کہتے ہیں۔ اور پنسل کے ہر خط کو شعاع کہتے ہیں اور پنسل کی شعاعوں کے نقطہ
 تراکز کو پنسل کا رأس کہتے ہیں۔
 پنسل کی شعاعوں کو کاٹنے والے کسی خط کو پنسل کا قاطع کہتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر چار شعاعوں و ا، و ب، و ج، و د سے بننے والی ایک پنسل کو
 دو قاطع بالترتیب نقاط ا، ب، ج، د اور ا، ب، ج، د پر قطع کریں تو (ا ب ج د) = (ا ب ج د)



$$(ا ب ج د) = \frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب} = \frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب} = \frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب}$$

$$\frac{\frac{1}{ا} \times ا ب \times ج د \times ا د}{\frac{1}{ب} \times ب ج \times د ا \times ا ب} = \frac{ا ب \times ج د \times ا د}{ب ج \times د ا \times ا ب}$$

جہاں زاویوں کی علامتوں کو بھی ملحوظ رکھا گیا ہے۔

$$\frac{\text{جب اوب} \times \text{جب ج ود}}{\text{جب اود} \times \text{جب ج وب}} =$$

اسی طرح سے (ا ب ج د) = $\frac{\text{جب اوب} \times \text{جب ج ود}}{\text{جب اود} \times \text{جب ج وب}}$
 چونکہ پنل کے قاطعوں کے تمام مقامات کے لیے

$$\frac{\text{جب اوب} \times \text{جب ج ود}}{\text{جب اود} \times \text{جب ج وب}} = \frac{\text{جب اوب} \times \text{جب ج ود}}{\text{جب اود} \times \text{جب ج وب}}$$

اس لیے ثابت کرو کہ (ا ب ج د) = (ا ب ج د)

نوٹ (۱)۔ یہ طریقہ اُن صورتوں پر بھی حاوی ہے جبکہ قاطع پنل کی ایک یا ایک سے زیادہ مدد وہ شعاعوں کو قطع کرے۔ قاطع کے مختلف مقامات کے لیے طالب علم مناسب شکلیں کھینچ کر ثبوت یہم پہنچائے۔

نوٹ (۲)۔ مسئلہ بالا میں یہ ثابت ہوا کہ اگر چار شعاعوں و اوب، وج، ود سے بننے والی پنل کو کوئی قاطع نقاط ا، ب، ج، د پر قطع کرے تو صف ا ب ج د کی چلیپی نسبت قاطع کے مقام پر منحصر نہیں ہے بلکہ پنل کی شعاعوں کے درمیانی زاویوں پر منحصر ہے۔ اس متقل چلیپی نسبت کو پنل کی چلیپی نسبت کہتے ہیں اور اسے علامت و (ا ب ج د) سے تعبیر کرتے ہیں۔

۸۹۔ تعریفات۔ اگر ایک خط مستقیم اج کی داخلی اور خارجی تقسیم ایک ہی نسبت میں ب اور د پر کی جائے [یعنی اگر $\frac{اب}{بج} = \frac{اد}{دج}$] تو یوں کہا جاتا ہے کہ اج کی موسیقی تقسیم ب اور د پر ہوئی ہے۔ اور صف ا ب ج د

د ————— ب ————— ج ————— ا

موسیقی صف کہتے ہیں نیز نقاط ا اور ج کے لحاظ سے نقاط ب اور د ایک دوسرے کے موسیقی مزدوج کہلاتے ہیں۔

$$\frac{\text{اب} \times \text{ج د}}{\text{اد} \times \text{ب ج}} = \text{موسیقی صف ا ب ج د کی چلیپی نسبت}$$

$$= \frac{اب}{بج} \div \frac{اد}{دج} = ۱ -$$

پس صف اب ج د موسیقی صف ہوگی اگر اس کی چلیپی نسبت (اب ج د) = ۱۔
یعنی وہ صف جس کی چلیپی نسبت - اکے مساوی ہے موسیقی صف ہے۔
یہ ظاہر کرنے کے لیے کہ ا اور ج کے لحاظ سے ب اور د ایک دوسرے کے
موسیقی مزدوج ہیں موسیقی صف اب ج د کو (اج ب د) = ۱۔ سے بھی
تعبیر کرتے ہیں۔

۹۔ مسئلہ۔ اگر (اج ب د) = ۱۔ اتو (د ب ج ا) = ۱۔

د ج ب ا

از روئے تعریف $\frac{اب}{بج} = \frac{اد}{دج}$

اس لیے تبدیل نسبت سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{دج}{بج} = \frac{اد}{اب}$$

$$\frac{دج}{ج ب} = \frac{د ا}{ا ب} \quad \text{یعنی}$$

یعنی (د ب ج ا) = ۱۔

۱۰۔ مسئلہ۔ اگر (اب ج د) = ۱۔ اتو اب ج ا د کے طول موسیقی سلسلہ میں ہونگے

چونکہ (اب ج د) = ۱۔

$$\text{اس لیے } \frac{اب \times ج د}{اد \times ج ب} = ۱۔$$

$$\text{یعنی } \frac{اب (اد - اج)}{اد (اب - اج)} = ۱۔$$

یعنی اب \times اد - اب \times اج = اد \times اب + اد \times اج
طرفین کو اب \times اج پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{۱}{اج} - \frac{۱}{اد} = \frac{۱}{اد} + \frac{۱}{اج}$$

یعنی $\frac{اب}{اج} - \frac{ا}{د} = \frac{ا}{ج} - \frac{ا}{د}$

یعنی $\frac{اب}{اج}$ ، $\frac{ا}{ج}$ ، $\frac{ا}{د}$ سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

یعنی طول اب، اج، اد موسیقی سلسلہ میں ہیں۔

۹۲۔ مسئلہ۔ اگر (اج، ب د) = ۱ اور ب د کا وسطی نقطہ

و ہو تو $وا \times وج = وب$

د ————— و ج ب ا

پہلے (اج، ب د) = ۱

اس لیے $\frac{اب}{بج} = \frac{ا}{دج}$

یعنی $\frac{وب - وا}{وج - وب} = \frac{ود - وا}{وج - ود}$

یعنی $\frac{وب - وا}{وج - وب} = \frac{وب + وا}{وج + وب}$ کیونکہ $ود = وب$

یعنی $\frac{وج + وب}{وج - وب} = \frac{وب + وا}{وب - وا}$ (تبدیل نسبت)

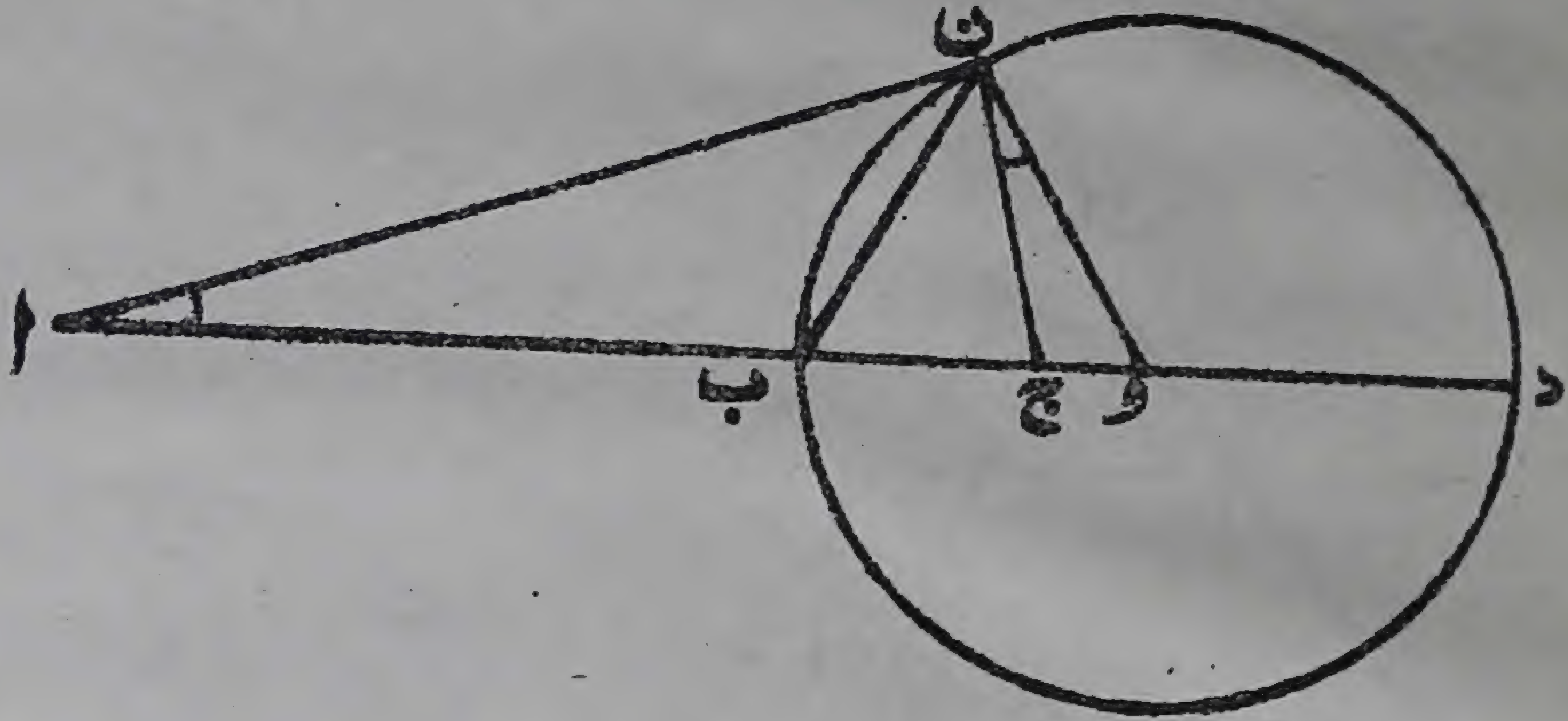
یعنی $\frac{وج}{وب} = \frac{وب}{وا}$ (ترکیب تفصیل نسبت)

یعنی $وا \times وج = وب$

۹۳۔ مسئلہ۔ اگر (اج، ب د) = ۱ اور قطرب د پر

کھینچے ہوئے دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہو تو $\frac{ا}{بج} = \frac{ا}{بج}$

فرض کرو کہ ب د کا وسطی نقطہ ہے
ن ا، ن ب، ن ج، ن و کو ملاؤ



سابقہ مسئلہ کی گروے

$$و ا \times وج = و ب^2$$

$$= و ن^2$$

یعنی و ن ہمیں ہے ا ن ج کے حائط دائرہ کا

$$(1) \dots\dots\dots و ن ج = ن ا ب$$

چونکہ و ب = و ن

اس لیے و ن ب = و ب ن

$$(2) \dots\dots\dots و ن ج + ج ن ب = ن ا ب + ا ن ب$$

(1) اور (2) سے حاصل ہوتا ہے

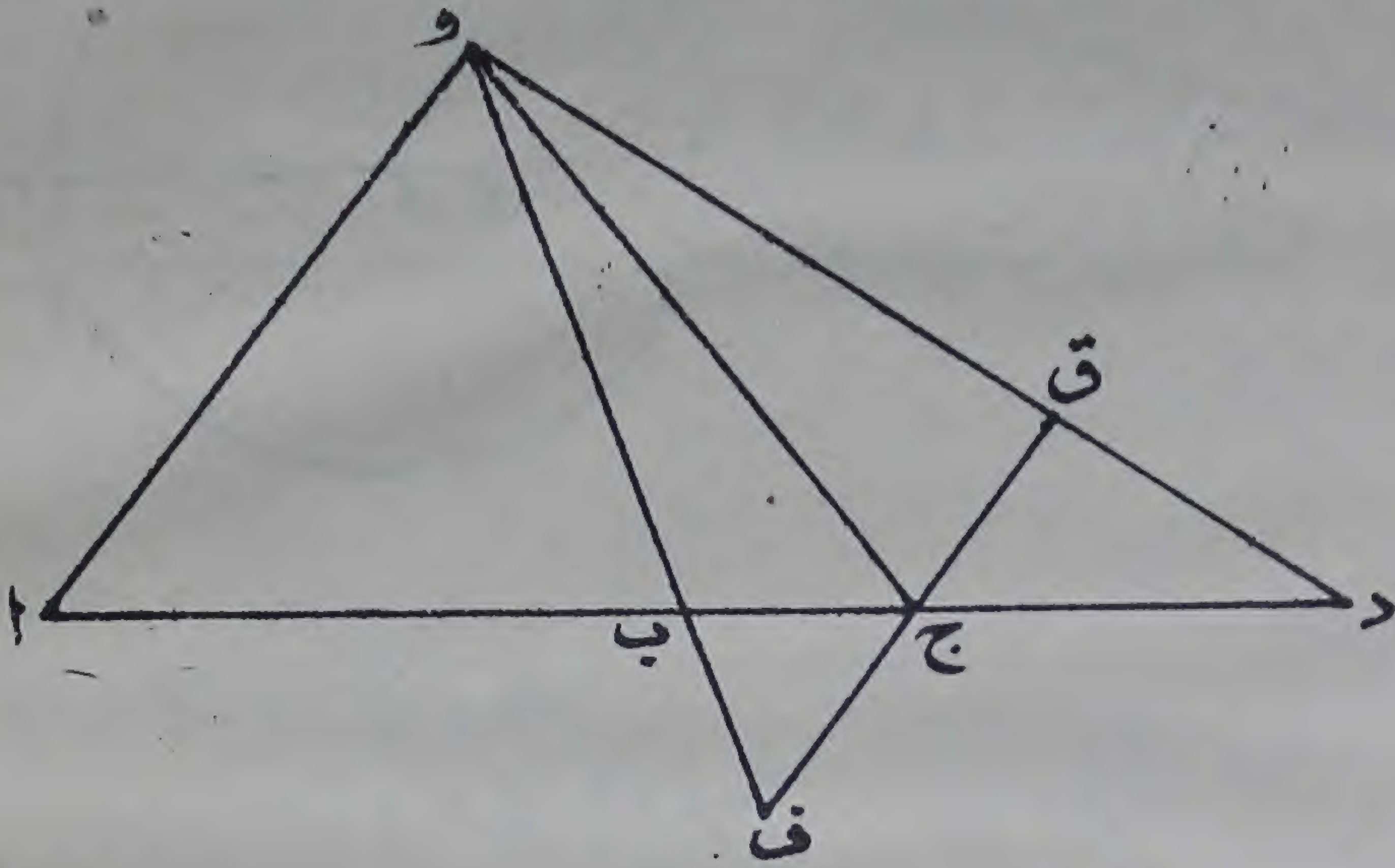
$$ج ن ب = ا ن ب$$

یعنی ن ب داخلی منصف ہے ا ن ج کا

$$\text{اس لیے } \frac{ن ب}{ن ج} = \frac{ا ب}{ب ج} \text{ یہی ثابت کرنا تھا۔}$$

۹۴۔ مسئلہ۔ اب ج د ایک موسیقی صنف ہے اس کے باہر کوئی

نقطہ ہے۔ اگر ج میں سے ایک خط ف ج ق خط و ا کے متوازی کھینچا جائے جو ب سے ف پر اور و د سے ق پر ملے تو ف ج = ج ق۔



متشابه مثلثوں اب و اور ج ب ف میں

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{ا ب}{ب ج} = \frac{و ف}{ف ج}$$

نیز متشابه مثلثوں ا د و اور ج د ق میں

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{ا د}{ج د} = \frac{و ق}{ج ق}$$

لیکن چونکہ اب ج د موسیقی صنف ہے

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ا د}{ج د}$$

نتائج (۱)، (۲)، (۳) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{ف ج} = \frac{1}{ج ق}$$

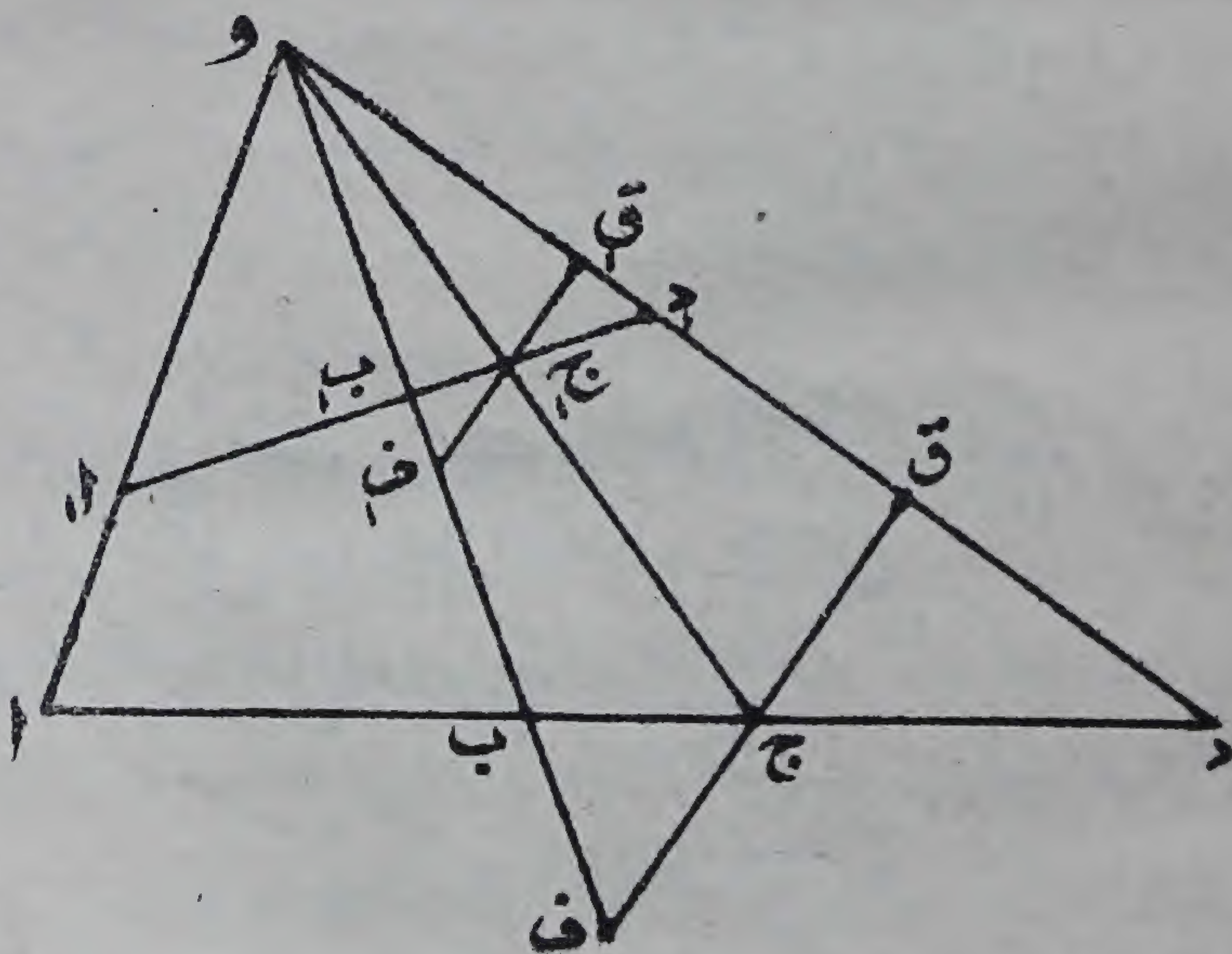
اس لیے $ف ج = ج ق$

عکس۔ اگر اب ج د ایک صف ہو اور اس کے باہر ایک نقطہ

و ہو اور ج سے و کے متوازی ایک خط ف ج ق کھینچا جائے جو و ب سے ف پر اور و د سے ق پر ملے اور اگر $ف ج = ج ق$ تو اب ج د ایک موسیقی صف ہوگی۔
اس مسئلہ کا ثبوت اوپر کے مسئلہ کے ثبوت کے استدلال کو الٹنے سے طالب علم خود حاصل کرے۔

۹۵۔ مسئلہ۔ اگر اب ج د ایک موسیقی صف ہو اور اس کے

باہر کوئی نقطہ و ہو تو و ا، و ب، و ج، و د ہر قاطع کو ایک موسیقی صف پر قطع کریں گے۔



فرض کرو کہ کوئی دوسرا قاطع خطوط و ا، ب، ج، د کو بالترتیب
نقاط ا، ب، ج، د پر قطع کرتا ہے۔

نقاط ج اور ج میں سے خطوط ف ج ق اور ف ج ق خط
و ا کے متوازی کیسے ہو۔

چونکہ (ا ب ج د) ایک موسیقی صف ہے اس لیے ف ج = ج ق
اس لیے ف ج = ج ق اور دفعہ گزشتہ کے مسئلہ کے عکس سے حاصل ہوتا ہے کہ ا ب ج د
ایک موسیقی صف ہے۔

تعریفات۔ اگر پنل و (ا ب ج د) ایسی ہو کہ اس کے ایک

مخصوص قاطع (اور اس لیے مسئلہ بالا کی رو سے اس کے ہر قاطع پر) ایک موسیقی صف
حاصل ہوتی ہو تو ایسی پنل کو موسیقی پنل کہتے ہیں۔ اور شعاعوں و ب، و د کو
بلحاظ شعاعوں و ا، و ج کے ایک دوسرے کی موسیقی مزدوج شعاعیں کہتے ہیں۔

نوٹ (۱)۔ گزشتہ ترقیم کے اصول پر موسیقی پنل و (ا ب ج د) کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

و (ا ب ج د) = ا یا و (ا ب ج د) = ا۔

نوٹ (۲)۔ دفعہ ۴ کے مسئلہ کی رو سے (ا ب ج د) = (ا ب ج د) اور

چونکہ حسب مفروض (ا ب ج د) = ا اس لیے ثابت ہوا کہ (ا ب ج د) = ا۔
یہ مسئلہ بالا کا متبادل ثبوت ہے۔

تعریفات۔ ایسے چار خطوط مستقیم کے نظام کو جن میں سے کوئی تین

متوازی نہیں ہیں، مکمل ذواربعتہ الاضلاع کہتے ہیں۔

یہ چار خطوط مکمل ذواربعتہ الاضلاع کے ضلعے کہلاتے ہیں۔

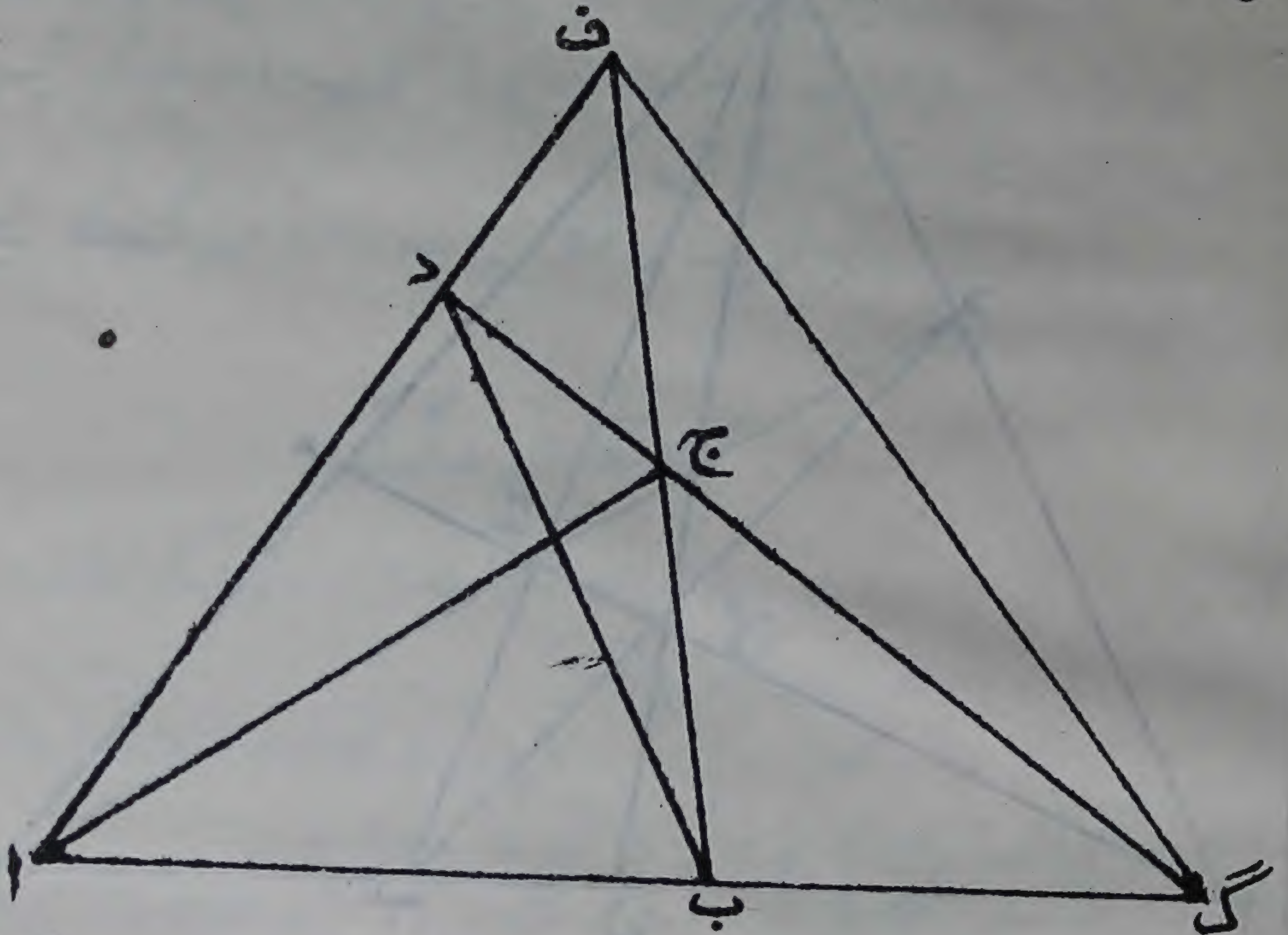
فرض کرو کہ ایک مکمل ذواربعتہ الاضلاع کے ضلعے ا ب، ب ج، ج د، د ا ہیں۔

نیز فرض کرو کہ ا ب اور ج د کا نقطہ تقاطع گ ہے اور ا د اور ب ج کا

نقطہ تقاطع ف ہے۔ پس مکمل ذواربعتہ الاضلاع کے ضلعوں میں سے دو دو کے

تقاطع سے چھ نقطے ا ب، ب ج، ج د، د ا، گ، ف حاصل ہوتے ہیں۔ ان نقطوں کو

مکمل ذواربعتہ الاضلاع کے چھ رؤس کہتے ہیں۔



مقابل کے رؤسوں کو ملائے والے تین خطوط یعنی 'اج'، 'ب' د اور 'ف' گ کو مکمل ذواربعتہ الاضلاع کے تین قطر کہتے ہیں۔

۹۷۔ مسئلہ۔ مکمل ذواربعتہ الاضلاع کے کوئی دو قطر تیسرے قطر

کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔
دفعہ گزشتہ کی ترقیم کے مطابق مکمل ذواربعتہ الاضلاع کے قطر 'اج'، 'ب' و اور 'ف' گ ہیں۔

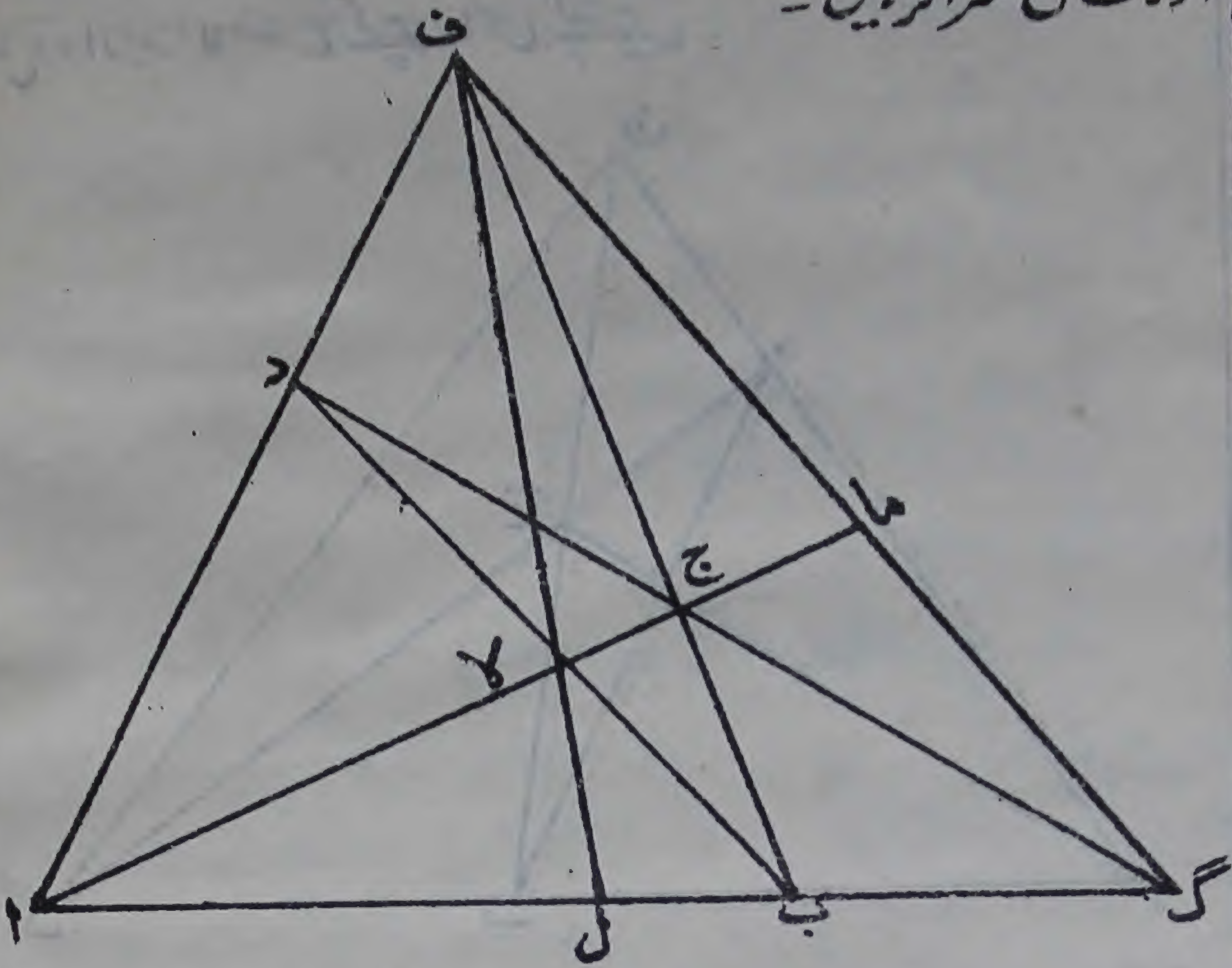
فرض کرو کہ قطر 'اج' کو دوسرے دو قطر 'ب' د اور 'ف' گ بالترتیب نقاط لا اور ما پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے کہ 'اج' ما موسیقی صفا ہے۔

فرض کرو کہ 'ف' لا اور 'ا' ب کا نقطہ تقاطع 'ل' ہے۔

مثلث 'ف' ا' ب کے رؤسوں سے گزرنے والے خط 'اج'، 'ب' د

اور فل متراکز ہیں۔



اس لیے سیوا کے مسئلہ سے

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ + = \frac{ا}{ل} \times \frac{ب}{ج} \times \frac{ف}{د}$$

نیز مثلث ف ا ب کے ضلعوں پر کے تین نقطے گ، ج، د ہم خط ہیں۔
اس لیے صیغہ لا اس کے مسئلہ سے

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ - = \frac{ا}{گ} \times \frac{ب}{ج} \times \frac{ف}{د}$$

نتیجہ (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ

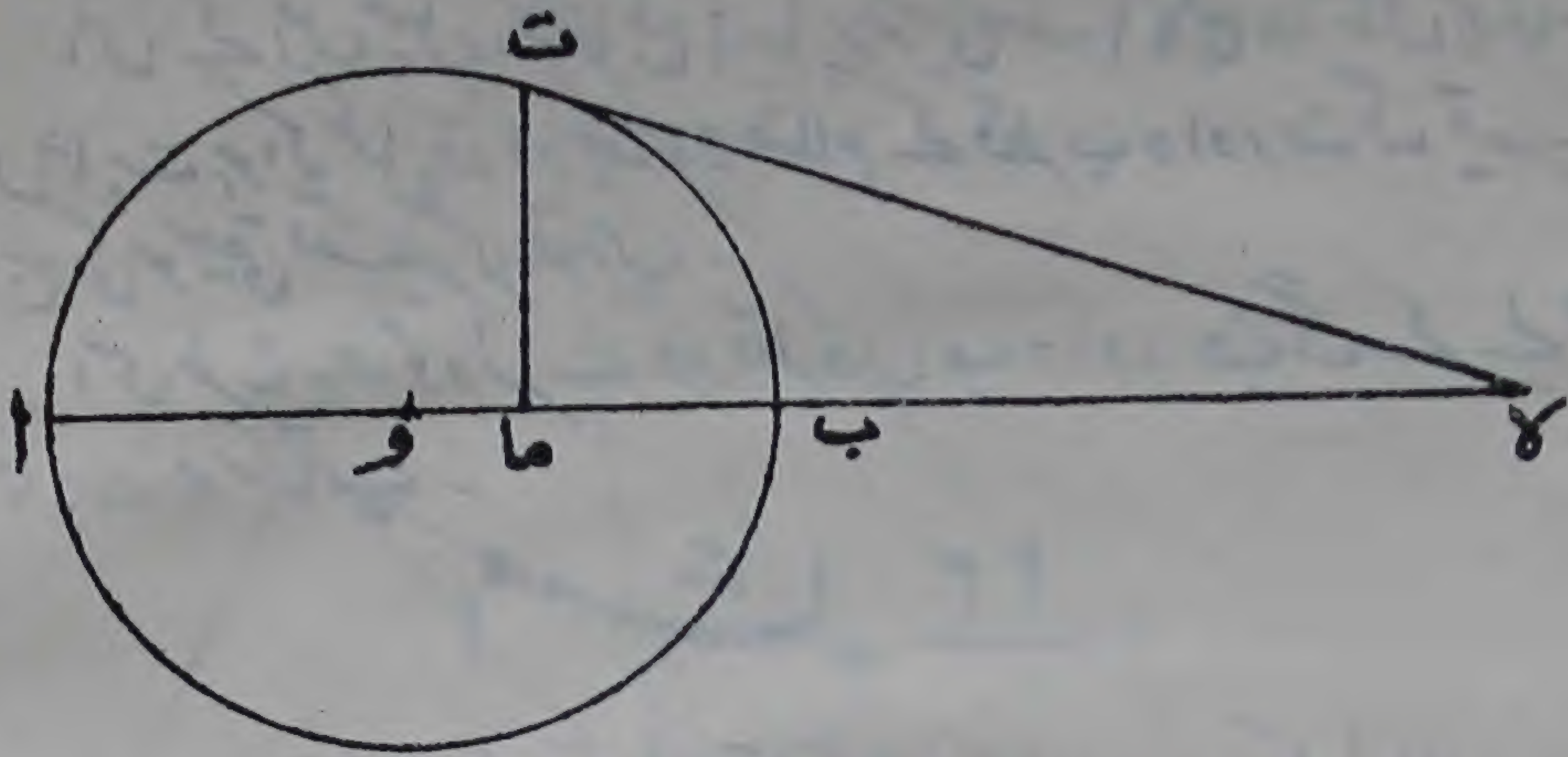
$$\frac{ا}{ل} = \frac{ا}{گ}$$

یعنی ا ل ب گ موسیقی صنف ہے

اس لیے نپیل ف (ا ل ب گ) موسیقی نپیل ہے۔
اس لیے اس نپیل کے قاطع ا ما پر موسیقی صنف الا ج ما حاصل ہوتی ہے۔
پس ثابت ہوا کہ مکمل ذوار بقتہ الا ضلاع کے قطرب د اور ف گ تیسرے
قطر ا ج کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔
اسی طرح سے د و گ سے دو قطروں ب د اور ف گ کے لیے بھی
مسئلہ ثابت ہو سکتا ہے۔

مسئلہ ۲۲

- (۱) خط ا ب کا وسطی نقطہ لایے، ا اور ب کے لمحاظ سے
نقطہ لا کا موسیقی مزوج کہاں ہے؟
- (۲) مثلث ا ب ج کے زاویہ ا کے منصف ا لا اور ا ما ہیں۔
ثابت کرو کہ ا (ب ل ج ما) موسیقی نپیل ہے۔
- (۳) مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کا ایک قطرب ق ضلع ب ج
پر عمود وار ہے ثابت کرو کہ ا (ق ب ف ج) موسیقی نپیل ہے۔
- (۴) ا اور ب دو ثابت نقطے ہیں، ج د کوئی خط ہے جو ا ب کے
متوازی نہیں ہے ج د پر ایک نقطہ ن ایسا معلوم کرو کہ ا ن ب کا
ایک منصف خط ج د ہو۔
- (۵) ا ب ج ایک مثلث ہے اور ن ایک ثابت نقطہ ہے جو مثلث
کے اضلاع پر نہیں ہے۔ ن میں سے ایک خط کھینچو جو مثلث کے اضلاع
ا ب، ب ج، ج ا سے ایسے نقاط ف، ق، س پر ملے کہ (ن ف ق س) = ا۔
- (۶) ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے، ب د کے متوازی
ا ع کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ ا (ب د ج ع) = ا۔
- (۷) ایک دائرہ کے قطرا ب محدودہ پر کے کسی نقطہ لا سے
دائرہ کا ایک ماس لات کھینچا گیا ہے اور ت سے ا ب پر عمود ت ما
ہے۔ ثابت کرو کہ لا ا اور لا ب کا حسابی اوسط لا و ہے، ہندسی



اوسط لات ہے اور موسیقی اوسط لا ما ہے۔

(۸) شکل بالائیں ثابت کرو کہ (ا ب، ما لا) = ۱۔

(۹) شکل بالائیں اگر لا سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ و سے

ف اور ق پر اور ف ما سے ن پر ملے تو ثابت کرو کہ لا ف ن ق موسیقی صف ہے۔

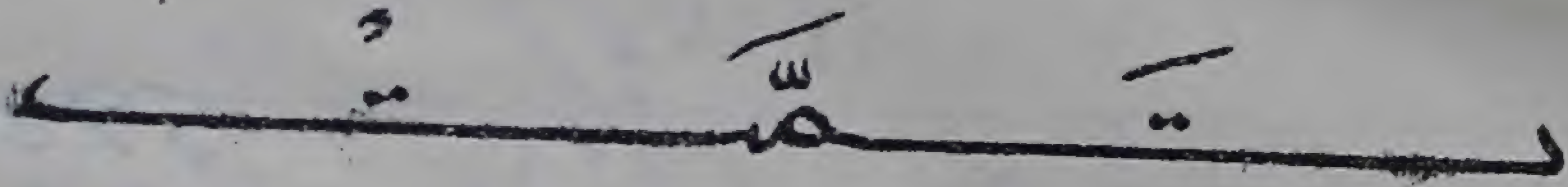
(۱۰) دو دائرے (و) اور (م) ایک دوسرے کو عمود وار قطع کرتے ہیں۔ اگر دائرہ (و) کا کوئی قطر ا ب دائرہ (م) سے ف اور ق پر ملے تو ثابت کرو کہ (ا ب، ف ق) = ۱۔

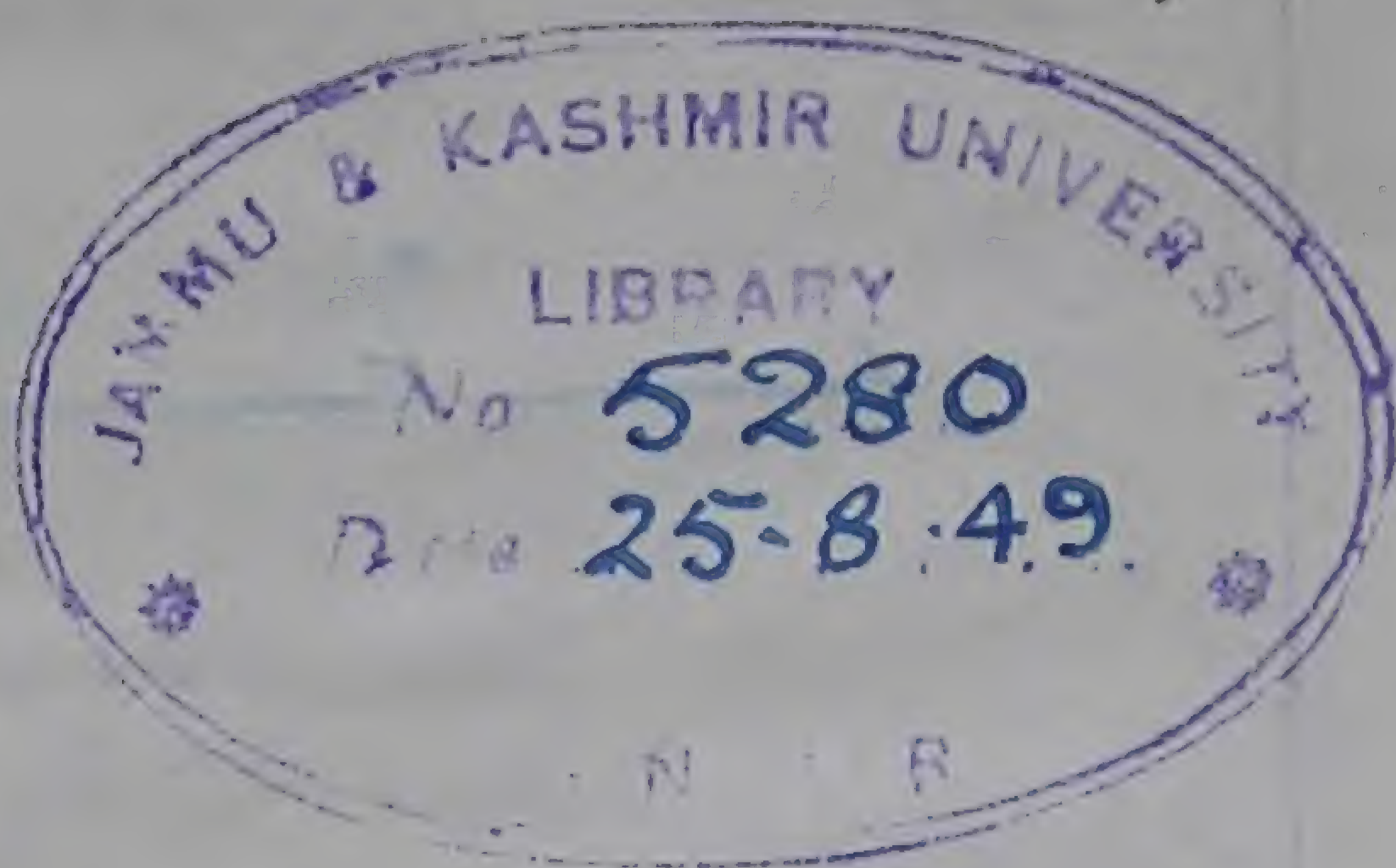
(۱۱) و (ا ب ج د) موسیقی پنل ہے۔ اگر ا و ج قائمہ زاویہ ہو تو دفعہ ۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ ب و د کے منصف و ا، و ج ہیں۔ [مقابلہ کرو دفعہ ۳ کے ساتھ]

(۱۲) ایک خط پر تین نقطے ا، ب، ج دیے گئے ہیں۔ صرف پٹری کو استعمال کرتے سے دفعہ ۴ کی مدد سے اسی خط پر نقطہ د ایسا معلوم کرو کہ (ا ب ج د) = ۱۔

(۱۳) و ا، و ب، و ج تین دیے ہوئے خط ہیں۔ خط و د

ایسا کہینچو کہ (ا ب ج د) = ۱۔
 (۱۴) دو دائرے ایک دوسرے کو ب اور ج پر قطع کرتے ہیں اور
 ان دائروں کا ایک مشترک مماس دائروں کو ف اور ق پر مس کرتا ہے ج اور
 ج میں سے گزرنے والا کوئی دائرہ خط ف ق سے ل اور م پر ملتا ہے
 ثبات کرو کہ (ف ق ل م) = ۱۔





صحت نامہ

علم ہندسہ مستوی

(بار دوم)

نہا	غلط	صحیح	نہا	غلط	صحیح
۸	۲۱	ج - تو	۵۷	ن - ف	ن، ف
۲۶	۱۳	ب، ا، ج	۶۸	ب د	ا ب د
۳۹	۱۲	یہ	۸۲	میں خط ع ط کو کچھ آگے بڑھایا جائے	
۴۲	آخری	ہونگے	۵	(و) اور (و)	(و) اور (و)
۴۹	۶	شکل ۱	۹۶	ط	ط
۵۳	شکل ۲	ب ج	۱۰۵	کھینچو خود دیے	کھینچو خود دیے
۵۴	۱۳	ب	۱۱۵	قیمتیں	قیمتیں
۵۵	۱۹	ا ب	۱۱۶	شکل	شکل





**ALLAMA
IQBAL LIBRARY**

**UNIVERSITY OF KASHMIR
HELP TO KEEP THIS BOOK
FRESH AND CLEAN**